DS 2 le 29 septembre 2012

A toute application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on associe l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que si M a pour affixe z alors $F(M)$ a pour affixe $f(z)$.

On dit que F est une similitude directe si :

$$\exists(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b$$

Exercice 1

1. Montrer que l'ensemble des similitudes muni de la composition est un groupe.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une similitude (a) soit une translation , (b) soit une homothétie, (c) soit une rotation.
3. Montrer que l'ensemble des translations est un sous groupe de l'ensemble des similitudes.
4. Montrer que l'ensemble constitué des rotations et des translations est un sous groupe de l'ensemble des similitudes.
5. Montrer que l'ensemble constitué des homothéties de rapport non nul et des translations est un sous groupe de l'ensemble des similitudes.
6. Soit F une similitude qui n'est pas une translation. Montrer que F admet un unique point fixe Ω et que F est la composée d'une homothétie de centre Ω et d'une rotation de centre Ω. On précisera le rapport de l'homothétie et l'angle de la rotation.
7. Que peut-on dire de la composée d'une rotation de centre Ω_1 d'angle θ_1 et d'une rotation de centre Ω_2 d'angle θ_2?

On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si il existe une similitude S telle que

$$f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$$

Exercice 2

1. Montrer que si les triangles ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables alors :
   (a) on a égalité des angles :
   $$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \widehat{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})} \quad (1)$$
   $$\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'})} \quad (2)$$
   $$\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'})} \quad (3)$$
   (b) on a égalité des rapports :
   $$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} \quad (4)$$
2. Montrer les trois cas de similitude suivants :
   (a) **Premier cas de similitude:**
   Si ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles ayant des angles égaux c'est à dire vérifiant les équations (1), (2) et (3) alors les triangles sont directement semblables.
   (b) **Deuxième cas de similitude:**
   Si ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles ayant un angle égal entre des côtés proportionnels c'est à dire vérifiant les équations (1) et $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'A'}{CA}$ alors les triangles sont directement semblables.
   (c) **Troisième cas de similitude:**
   Si ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles de même sens ayant des côtés proportionnels c'est à dire vérifiant l'équation (4) alors les triangles sont directement semblables.

Exercice 1

$\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et n est un entier naturel non nul.
Dans tout l'exercice, (a_n) est une suite d'éléments non nuls de $\mathbf{R}$. On lui associe la suite (p_n) définie par : $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$. Lorsque (p_n) converge, on note p sa limite.
Lorsque (p_n) diverge vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$), on dit que (p_n) admet $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) pour limite.

Première partie

1° Donner un exemple de suite (a_n), telle que (p_n) converge vers $p = 0$.

2° Prouver que, si (p_n) converge vers p différent de 0, alors (a_n) converge vers 1.

3° On suppose dans cette question qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$a_n > 0 \text{ , pour } n > n_0 .$$

On pose, pour n supérieur à n_0, $q_n = \prod_{k=n_0+1}^{n} a_k$.

a) Pour n supérieur à n_0, exprimer q_n en fonction de p_n et de p_{n_0}.

b) Montrer que, si la série $\sum \ln(a_n)$ converge, alors la suite (p_n) converge et que p est non nul.

c) On suppose que la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Préciser dans chacun de ces deux cas la limite de la suite (p_n).

Dans ce qui suit, on définit u_n par : $a_n = 1 + u_n$.

4° On suppose dans cette question que, pour tout n, on a : $u_n \geq 0$.
Démontrer que la suite (p_n) converge vers $p > 0$ si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

5° On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ converge.

a) Montrer que, si la série $\sum {u_n}^2$ converge, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

b) Montrer que, si la série $\sum {u_n}^2$ diverge, alors la suite (p_n) converge et $p = 0$.

6° Prouver que, si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

Deuxième partie

Les quatre questions qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre. On pourra les traiter en utilisant les résultats établis dans la première partie, à condition de s'y référer de manière très précise.

1° Etudier la convergence et déterminer la limite de (p_n) dans les deux cas suivants :

a) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$.

b) $a_n = 1 + (-1)^n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

2° On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On pose : $a_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{n} e^{-t^2}\,dt$. La suite (p_n) est-elle convergente ?

3° Soit (u_n) une suite de nombres réels vérifiant : $1+u_n \neq 0$ pour $n \geq 1$. On pose :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k) \quad , \quad v_n = \frac{u_n}{p_n} .$$

a) Pour $n > 1$, exprimer v_n en fonction de $\frac{1}{p_n}$ et de $\frac{1}{p_{n-1}}$.

b) On suppose dans cette question que la série $\sum {u_n}^2$ converge.

i) Etablir que la convergence de la série $\sum u_n$ implique la convergence de la série $\sum v_n$.

ii) La convergence de la série $\sum v_n$ implique-t-elle la convergence de la série $\sum u_n$? Justifier.

c) Déterminer une suite (u_n) telle que la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge.

4° Soit α un réel strictement positif, et $a_n = 1+\sin\left(\frac{c}{n^{\alpha}}\right)$ où c est un nombre réel tel que pour tout n, a_n soit non nul.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α et c pour que (p_n) converge vers 0

b) On suppose que : $\alpha = 1$.

Etudier la convergence de la série $\sum p_n$.

[On pourra utiliser la convergence vers un réel noté γ de la suite (t_n) où $t_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n)$].

Etant donné un entier naturel non nul p, une série $\sum u_n$ sera dite une p-série alternée s'il existe un entier naturel n_0 et une suite réelle (a_n) de signe constant, tels que pour tout $n \geq n_0$ on ait :

$$u_n = (-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)} a_n$$

où E désigne la fonction partie entière. Avec cette définition une 1-série alternée sera donc une série alternée à partir d'un certain rang.

PARTIE I — <u>Préliminaires sur les p-séries alternées</u>

I-1 <u>Sur les 1-séries alternées</u> (ou séries alternées)

I-1-1 Etant donnée une série alternée $\sum (-1)^n a_n$ (avec a_n de signe constant) énoncer sans démonstration une condition suffisante pour que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Quelle est la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $(n \geq 1)$?

I-1-2 Quelle est la nature des séries

I-1-2-1 $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$, $(n \geq 2)$? I-1-2-2 $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $(n \geq 2)$?

I-2 <u>Sur les p-séries alternées.</u> **(où p désigne un entier fixé supérieur ou égal à deux).**

Pour simplifier, on suppose dans les questions I-2-1, I-2-2, I-2-3 que n_0 est égal à zéro. On considère une p-série alternée $\sum u_n$ et on lui associe la série $\sum v_q$ avec

$$v_q = \sum_{n=pq}^{n=pq+p-1} u_n \quad .$$

I-2-1 Montrer que $\sum v_q$ est une série alternée.

I-2-2 On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Montrer, en étudiant les sommes partielles de chacune des deux séries, que la convergence de la série $\sum u_n$ équivaut à la convergence de la série $\sum v_q$.

I-2-3 On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|u_{n+1}| \leq |u_n| \text{ pour tout } n \geq n_1.$$

Quelle est la nature de la série $\sum v_q$?

I-2-4 On considère la série $\sum u_n$ avec

$$u_n = 0 \text{ pour } 0 \leq n < 2p \ ,$$

$$u_n = \frac{(-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}{\sqrt{E\left(\frac{n}{p}\right)+(-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}} \quad \text{pour tout } n \geq 2p.$$

Expliciter v_q ; en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

I-2-5 On considère la série $\sum u_n$ avec

$$u_n = 0 \text{ pour } 0 \leq n < 2p \ ,$$

$$u_n = \frac{(-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}{\sqrt{E\left(\frac{n}{p}\right)}+(-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}} \quad \text{pour tout } n \geq 2p.$$

Expliciter v_q ; en déduire la nature de la série $\sum u_n$.