DS 3 le 13 octobre 2012

Exercice 1 Mines 2011

Résoudre le système suivant dans $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$, puis dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overline{3}x + \overline{7}y & = & \overline{3} \\ \overline{6}x - \overline{7}y & = & \overline{0} \end{array}\right.$$

Exercice 2 Mines 2011

1. Pour quels $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ l?intégrale
$$I(r,s) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{r-1}$$
est elle définie ?
2. Calculer $I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

PROBLEME

page 160 1/5 - 1992 -
E. N. S. A. E M Math 1

JUIN 1992

OPTION A (MATHEMATIQUES)

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 3 heures)

TEXTE (5 pages)

1°) Dans toute l'épreuve, le corps de base est $\mathbb{R}$.

2°) Les deux problèmes sont indépendants et peuvent être abordés dans un ordre quelconque. Le premier problème est axé sur l'analyse et sur des éléments d'arithmétique, le second est essentiellement arithmétique.

*

* *

PROBLEME I

L'objet des trois premières question de ce problème est de démontrer que le nombre π, rapport de la longueur d'un cercle à son diamètre, est irrationnel. Les quatres dernières questions examinent quelques conséquences de ce résultat.

On fait donc, dans les question 1°) à 3°) inclus, l'hypothèse qu'il existe deux entiers strictement positifs premiers entre eux, notés a et b, tels que $\pi = \frac{a}{b}$, et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.

On note n un entier naturel, et x un réel quelconque :

$$P_n(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}$$

et :

$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(x) \sin x \, dx, \quad \text{avec } \pi = \frac{a}{b}.$$

1°)a) Calculer $\sup_{0 \leqslant x \leqslant \pi} |P_n(x)|$ en fonction de a, b et n.

b) Montrer l'inégalité stricte $I_n > 0$.

c) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

2°) Pour $k \in \mathbb{N}$, la dérivée d'ordre k de P_n est notée $P_n^{(k)}$. Par définition $P_n^{(0)} = P_n$.

Calculer $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$, en fonction de a,b,n,k, dans les trois cas suivants :

a) $0 \leqslant k \leqslant n-1$ (lorsque $n \geqslant 1$) ;

b) $n \leqslant k \leqslant 2n$;

c) $k \geqslant 2n+1$.

Montrer que, dans tous les cas considérés, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs.

3°)a) Montrer que I_n est un entier relatif.

b) Conclure à propos de l'hypothèse $\pi = \frac{a}{b}$.

4°) L'entier n, dans cette question, est supposé strictement positif. On rappelle que E(x) désigne le partie entière du réel x, c'est-à-dire l'unique entier relatif vérifiant $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$.

On pose :

$$x_n = n\pi - E(n\pi)$$

Montrer que les x_n, lorsque n décrit $\mathbb{N}^*$, sont des éléments de]0,1[deux à deux distincts.

5°) Soit ε un élément arbitraire de $]0,1[$. Montrer l'existence de deux entiers relatifs non nuls (p,q) tels que :

$$0 < q\pi - p < \varepsilon \ .$$

6°) ε étant toujours un élément arbitraire de $]0,1[$, montrer ensuite l'existence de deux entiers strictement positifs (p_1, q_1) tels que :

$$0 < q_1\pi - p_1 < \varepsilon \ .$$

7°) Calculer effectivement un couple (p_1, q_1) satisfaisant aux conditions de la question 6°) avec $\varepsilon = 0{,}01$.

*

* *

PROBLEME II

On rappelle les définitions suivantes :

Un élément p de $\mathbb{N}^*$ est dit premier s'il n'admet dans $\mathbb{N}^*$ que deux diviseurs distincts : 1 et p. Avec cette convention, 1 n'est pas considéré comme premier.

Un élément n de $\mathbb{N}^*$ est dit composé si et seulement si il existe au moins un diviseur k de n tel que $1 < k < n$. Le plus petit entier composé est donc 4.

Les lettre m,n,k désignent systématiquement dans ce problème des éléments de $\mathbb{N}^*$

1°) Soit n tel que $n \geqslant 2$. On pose :

$$a_n = 2^n - 1 \ .$$

Montrer que, si n est composé, a_n l'est aussi, et en déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \ , \quad (a_n \text{ premier}) \longrightarrow (n \text{ premier}) \ .$$

2°) Calculer a_{11}. Cet entier est-il premier ?
L'implication :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \ , \ (n \text{ premier}) \longrightarrow (a_n \text{ premier})$$

est-elle correcte ?

3°) Dans cette question, et dans toute la suite du problème, à tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on associe la somme S(n) de ses diviseurs dans $\mathbb{N}^*$, y compris 1 et n. On a donc, par exemple :

$$S(1) = 1 \quad \text{et} \quad S(2) = 3 .$$

a) On suppose $n \geqslant 2$. $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ est donné par sa factorisation, les entiers $p_1, p_2, \dots, p_k$ étant premiers, vérifiant $p_1 < p_2 < \dots < p_k$, et les exposants $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$ étant des éléments de $\mathbb{N}^*$.

Exprimer S(n) à l'aide des sommes :

$$\sum_{j=0}^{\alpha_i} p_i^j \ .$$

b) Montrer que, si S(n) = n+1, n est premier.

4°) Un entier strictement positif n est dit <u>déficient</u> si S(n) < 2n, <u>parfait</u> si S(n) = 2n et <u>abondant</u> si S(n) > 2n. Par exemple, 1 et 2 sont déficients.

a) Soit p un nombre premier. On considère l'entier p^α, où $\alpha \in \mathbb{N}^*$ (un tel entier est souvent appelé "nombre primaire"). p^α est-il déficient, parfait ou abondant ?

b) On fixe p premier, et on considère la suite de terme général:

$$u_\alpha = \frac{S(p^\alpha)}{p^\alpha} ,$$

où α décrit $\mathbb{N}^*$. Etudier la croissance de la suite (u_α) et déterminer sa limite éventuelle lorsque $\alpha \longrightarrow +\infty$.

5°) On se propose d'étudier ici l'ensemble des entiers parfaits <u>pairs</u>.

a) Vérifier que 6 est parfait, et donc que l'ensemble considéré est non-vide.

b) Montrer qu'un entier parfait pair a au moins un facteur premier impair. En conclure que, si x est entier parfait pair :

$$x = 2^\alpha . k ,$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^*$, et où k est un entier impair tel que $k \geqslant 3$.

c) Montrer que si m et n sont des entiers strictement positifs premiers entre eux, on a :

$$S(mn) = S(m).S(n) \quad .$$

d) Montrer que, si $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a l'inégalité :

$$S(mn) \geq m\,S(n) \quad ,$$

et que, si $m \geq 2$,

$$S(mn) \geq m\,S(n) + 1 \quad .$$

e) On conserve les notations précédentes jusqu'à la fin de la question 5°).

Montrer que $(2^{\alpha+1} - 1)$ divise k ; on peut donc poser

$$k = (2^{\alpha+1} - 1)\,k_1 \quad ,$$

où k_1 est un autre entier.

f) Montrer que $k_1 = 1$ et que $(2^{\alpha+1} - 1)$ est premier.

g) Réciproquement, si $x = 2^{n-1}(2^n - 1)$, où n est un entier tel que $n \geq 2$ et que $(2^n - 1)$ soit premier, vérifier que x est parfait pair. En déduire l'ensemble de tous les nombres parfaits pairs.

6°) On s'intéresse dans cette question aux entiers <u>abondants</u>.

a) Déterminer le plus petit entier abondant <u>pair</u>.
Est-ce le plus petit entier abondant, toutes parités confondues ?

b) A l'aide de 4°)b), montrer qu'un entier abondant <u>impair</u> admet au moins trois facteurs premiers distincts p_1, p_2, p_3 (avec $p_1 < p_2 < p_3$).

c) On suppose que x est abondant impair et admet <u>exactement</u> trois facteurs premiers distincts p_1, p_2, p_3 (avec $p_1 < p_2 < p_3$). Trouver toutes les valeurs possibles du triplet (p_1, p_2, p_3). On commencera par montrer que nécessairement $p_1 = 3$. On trouvera trois solutions.

On explicitera un nombre abondant impair correspondant à chacun des trois triplets trouvés.