PROBLEME II

1. Supposons n composé, il existe d, n' tel que $n = dn'$ et $d \notin \{1, n\}$

$$a_n = 2^n - 1 = 2^{dn'} - 1 = (2^d - 1) \sum_{k=0}^{n'-1} 2^{dk}$$

$2^d - 1$ est un diviseur de a_n différent de 1 et de a_n, a_n est donc composé. Par contraposée on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}, \qquad a_n \text{ est premier} \Rightarrow n \text{ est premier}$$

2.

$$a_{11} = 2047 = 23 * 89$$

a_{11} n'est donc pas premier. L'implication réciproque de la précédente est donc fausse.

3. (a)

$$S(n) = \sum_{0 \leq \beta_i \leq \alpha_i} p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k} = \left(\sum_{\beta_i=0}^{\alpha_i} p_i^{\beta_i} \right) = \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=0}^{\alpha_i} p_i^j \right)$$

(b) Si n n'est pas premier alors il admet un diviseur d différent de 1 et de n et donc

$$S(n) \geq 1 + d + n > n + 1$$

Par contraposée :

$$S(n) = n + 1 \Rightarrow (n \text{ premier})$$

4.

$$S(p^\alpha) = \sum_{j=0}^{\alpha} p^j = \frac{1 - p^{\alpha+1}}{1 - p}$$

$$\begin{aligned} S(p^\alpha) &> 2p^\alpha \Leftrightarrow 1 - p^{\alpha+1} > 2p^\alpha(1 - p) \\ S(p^\alpha) &> 2p^\alpha \Leftrightarrow 2p^\alpha < p^{\alpha+1} + 1 \end{aligned}$$

Or

$$2p^\alpha \leq p^{\alpha+1} < p^{\alpha+1} + 1$$

Donc p^α est abondant.

$$u_\alpha = \frac{S(p^\alpha)}{p^\alpha} = \frac{1}{p^\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} p^j = \sum_{j=0}^{\alpha} \frac{1}{p^j}$$

donc la suite u_α est croissante.

$$\lim_{\alpha \longrightarrow \infty} u_\alpha = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p - 1}$$

(a)

$$S(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$$

6 est donc un nombre parfait.

(b) Soit x un entier pair, si n'a pas de diviseur premier implair alors x est de la forme 2^α et est un nombre abondant.
Donc si x est un entier parfait pair, il a au moins un facteur premier impair et

$$\exists \alpha \in \mathbb{N}^*, \quad \exists k \geq 3, \text{ impair}, \quad x = 2^\alpha k$$

(c)

$$S(nm) = \sum_{0<d|n, 0<d'|m} dd' = \left(\sum_{d|n} d \right) \left(\sum_{0<d'|m} d^{'} \right) = S(n)S(m)$$

5. (a) Or $S(m) \geq m$ donc $S(nm) \geq mS(n)$
et si $m \geq 2$ alors $S(m) \geq m+1$ donc

$$S(nm) \geq (m+1)S(n) \geq mS(n) + 1$$

(b)

$$\begin{aligned} S(x) &= 2x \\ S(2^\alpha)S(k) &= 2^{\alpha+1}k \\ (2^{\alpha+1}-1)S(k) &= 2^{\alpha+1}k \end{aligned}$$

donc $(2^{\alpha+1}-1)$ divise $2^{\alpha+1}k$ et est premier avec $2^{\alpha+1}$ donc

$$(2^{\alpha+1}-1) \text{ divise } k$$

(c) En remplaçant k par $(2^{\alpha+1}-1)k_1$ on obtient

$$\begin{aligned} (2^{\alpha+1}-1)S((2^{\alpha+1}-1)k_1) &= 2^{\alpha+1}(2^{\alpha+1}-1)k_1 \\ S((2^{\alpha+1}-1)k_1) &= 2^{\alpha+1}k_1 \end{aligned}$$

Or si $k_1 \geq 2$

$$S((2^{\alpha+1}-1)k_1) \geq k_1 S(2^{\alpha+1}-1) + 1$$

donc

$$\begin{aligned} 2^{\alpha+1}k_1 &\geq k_1 S(2^{\alpha+1}-1) + 1 \\ 2^{\alpha+1}k_1 &\geq k_1(2^{\alpha+1}-1+1) + 1 \\ 2^{\alpha+1}k_1 &\geq k_1 2^{\alpha+1} + 1 \end{aligned}$$

on arrive à une contradiction. Donc $k_1 = 1$ et

$$S(2^{\alpha+1}-1) \leq 2^{\alpha+1}$$

donc

$$S(2^{\alpha+1}-1) = 2^{\alpha+1}$$

et $2^{\alpha+1}-1$ est un nombre premier.

(d) Supposons que $x = 2^{n-1}(2^n-1)$ où $n \geq 2$ et (2^n-1) premier

$$\begin{aligned} S(x) &= S(2^{n-1})S(2^n-1) \\ S(x) &= (2^n-1)(2^n-1+1) \\ S(x) &= (2^n-1)(2^n) \\ S(x) &= 2x \end{aligned}$$

et donc x est un nombre parfait pair.

(e) L'ensemble des nombres parfaits pairs est donc l'ensemble des nombres de la forme $2^{n-1}(2^n-1)$ où $n \geq 2$ et (2^n-1) premier

6. (a)