1 Centrale MP Math 1 2000

Partie I - La méthode de Newton pour les polynômes réels

P est un **polynôme** non constant donc P' n'est pas identiquement nul :
$\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid P'(x) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, succession finie d'intervalles ouverts.

I.A - L'équation de la tangente en $(x, P(x))$ au graphe de P est : $Y = P(x) + P'(x).[X - x]$
Pour $x \in \Omega$, elle coupe l'axe des x au point d'abscisse X telle que : $P(x) + P'(x).[X - x] = 0$
d'où : $\forall x \in \Omega$, $N_P(x) = x - \dfrac{P(x)}{P'(x)}$

I.B.1) - N_P fraction rationnelle, est de classe C^∞ sur Ω, et $N_P'(x) = \dfrac{P''(x)P(x)}{[P'(x)]^2}$ sur Ω

I.B.2) - Si $P(a) = 0$ et $P'(a) \neq 0$, a est un zéro simple de P, et on a : $\begin{cases} N_P(a) = a \\ N_P'(a) = 0 \end{cases}$

$\boxed{a \text{ est un point fixe super attractif de } N_P.}$

Si a est un zéro d'ordre $p \geq 2$ de P, on peut factoriser : $P(x) = [x - a]^p .Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $Q(a) \neq 0$

ainsi : $\begin{cases} P'(x) = p[x-a]^{p-1}.Q(x) + [x-a]^p.Q'(x) \\ P''(x) = p(p-1)[x-a]^{p-2}.Q(x) + 2p[x-a]^{p-1}.Q'(x) + [x-a]^p.Q''(x) \end{cases}$

d'où : $\forall x \in \Omega$, $N_P(x) = x - \dfrac{[x-a].Q(x)}{p.Q(x) + [x-a].Q'(x)}$

et $N_P'(x) = \dfrac{\Big[p(p-1).Q(x) + 2p[x-a].Q'(x) + [x-a]^2.Q''(x)\Big].(x-a).Q(x)}{[p.Q(x) + [x-a].Q'(x)]^2}$

Les deux fonctions ont une limite finies : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} N_P(x) = a \\ \lim\limits_{x\to a} N_P'(x) = \dfrac{p-1}{p} = 1 - \dfrac{1}{p} \end{cases}$, N_P étant C^∞ au voisinage de a.

N_P est prolongeable par continuité en a, son prolongement par continuité est dérivable en a, et même C^1 en a.

On le note encore N_P : $N_P'(a) = 1 - \dfrac{1}{p}$ $\boxed{a \text{ est un point fixe attractif de } N_P \text{ de multiplicateur } 1 - \frac{1}{p}}$

I.C - On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \Omega$ et $x_{n+1} = N_P(x_n)$ Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(x_n) = P'(x_n).[x_n - x_{n+1}]$
Si la suite est bien définie et tend vers a, en passant à la limite, par continuité de P et P' $P(a) = 0$

I.D.1) - Si on note encore p l'ordre de a comme zéro de P : N_P est C^1 au voisinage de a et $N_P'(a) = 1 - \dfrac{1}{p}$

Donc : $\exists \varepsilon > 0$, $\forall c \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ $|N_P'(c)| \leq 1 - \dfrac{1}{2.p} < 1$

N_P est ainsi **strictement contractante** sur un **fermé** de $\mathbb{R}$ complet, par le théorème du point fixe :
toutes les suites récurrentes pour $x_0 = y \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ convergent vers a l'unique point fixe de N_P dans ce fermé.

I.D.2) - L'ensemble formé des points dont la suite de Newton par P converge vers a contient $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.
Définissons : $N^+(a) = \{ x \geq a \ / \ \forall y \in [a, x]$, la suite de Newton de y par P converge vers $a\}$
$N^+(a)$ est un **intervalle** contenant a. Soit $\beta = \sup(N^+(a))$
Si l'ensemble $N^+(a)$ est **borné**, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \geq a + \varepsilon$
Supposons $\beta \in N^+(a)$, la suite de Newton de β converge vers a et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$
tel que $\beta_{n_0} = (N_P)^{n_0}(\beta) \in \Big] a - \dfrac{\varepsilon}{2}, a + \dfrac{\varepsilon}{2} \Big[$, mais alors $(N_P)^{n_0}$ est continue au voisinage de β
et donc pour y assez proche de β, et supérieur à β, $y_{n_0} = (N_P)^{n_0}(y) \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$
la suite converge donc ensuite vers a , et il existerait des éléments de $N^+(a)$ strictement supérieur à β
Absurde : $N^+(a) = [a, \beta[$ Si $N^+(a)$ **n'est pas borné** alors : $N^+(a) = [a, \infty[$
De même à gauche de a :

$\boxed{\text{le } \textbf{bassin immédiat } I(a) = N^-(a) \cup N^+(a) \text{ de } a \text{ est un intervalle ouvert de } \mathbb{R}}$

I.E.1) - P'' ne s'annulle pas sur $]-\infty, \xi[$, **supposons** $\boxed{P'' > 0 \text{ sur }]-\infty, \xi[}$

alors P' croit strictement vers 0 sur $]-\infty, \xi[$ donc $\boxed{P' < 0 \text{ sur }]-\infty, \xi[}$ et P décroit strictement de $+\infty$
jusqu'à $P(\xi)$ en passant par $P(a^-) = 0$ $\boxed{P > 0 \text{ sur }]-\infty, a^-[}$ et $\boxed{P < 0 \text{ sur }]a^-, \xi[}$

Pour tout $x \in]-\infty, \xi[$ par Taylor-Lagrange, il existe $c \in]a^-, x[$ tel que :

$$P(a) = P(x) + [a-x]\,P'(x) + \frac{1}{2}\,[a-x]^2\,P''(c)$$

$$N_P(x) - a = x - a - \frac{P(x)}{P'(x)} = \frac{P'(x)\,[x-a] - P(x) + P(a)}{P'(x)} = \frac{P''(c)\,[x-a]^2}{2.P'(x)} < 0$$

Quelque soit le point de départ $x_0 \in]-\infty, \xi[$, le premier terme x_1 est dans $]-\infty, a^-[$,

et $\boxed{\text{les autres termes de la suite resteront majorés par } a^-\text{, la suite est bien définie.}}$

De plus $\forall x \in]-\infty, a^-[$ $\quad N_P(x) = x - \dfrac{P(x)}{P'(x)} > x$ et la suite est donc croissante à partir de x_1.

Par croissance majorée, $\forall x_0 \in]-\infty, \xi[$ $\boxed{\text{la suite converge vers une limite } \ell}$ et on a $\ell \leq a^-$

et où par continuité : $N_P(\ell) = \ell$. Avec I.C : $P(\ell) = 0$ donc : $\boxed{\ell = a^-}$

Le bassin immédiat de a^- contient donc $]-\infty, \xi[$ mais ne peut contenir ξ où la suite n'est pas définie.

donc : $\boxed{\text{le bassin immédiat de } a^- \text{ égale donc }]-\infty, \xi[}$

Il en est de même dans le cas $P'' < 0$ sur $]-\infty, \xi[$

I.E.2) Le bassin immédiat de a est à extrémités réelles : $I(a) =]\,\alpha, \beta[$

- Avec I.D.2) : $I(a) = \{\, x \;/\; \forall y \in [a, x]\,,$ la suite de Newton de y par P converge vers $a\}$

Supposons que $x \in I(a)$ et que $N_P(x) \notin I(a)$ alors il existe z dans $[a, N_P(x)]$ tel que la suite de Newton de z par P ne converge pas vers a. Mais $z \in [N_P(a), N_P(x)]$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y \in [a, x]$ tel que $z = N_P(y)$. La suite de Newton de y suit alors celle de z, elle ne converge pas vers a. Contradiction sur $x \in I(a)$.

Donc : $\boxed{N_P(]\,\alpha, \beta[) \subset]\,\alpha, \beta[}$

Note : si $y = N_P(x)$ la suite de Newton de $y = x_1$ est obtenue par simple décalage à partir de celle de x $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{n+1}$ elle est donc définie et convergente vers la même limite a.

- Si $P(\alpha) = 0$ puisque $P(a) = 0$ avec le théorème de Rolle : $\exists \xi \in]\,\alpha, a[\subset]\,\alpha, \beta[$ tel que $P'(\xi) = 0$
  La suite de Newton de ξ n'est alors pas définie et cela contredit la définition du bassin immédiat.
  De même si $P(\beta) = 0$

Si $P'(\alpha) = 0$, puisque $P(\alpha) \neq 0$, par continuité de P et P' quand $x \to \alpha^+$ $\quad |N_P(x)| \to \infty$
l'abscisse du point d'intersection de la tangente avec Ox part à l'infini et donc $N_P(x) \notin]\,\alpha, \beta[$
De même si $P'(\beta) = 0$ $\quad \boxed{\text{ainsi } P(\alpha)P'(\alpha)P(\beta)P'(\beta) \neq 0}$

- Il n'y a aucun autre zéro de P que a sur $[\,\alpha, \beta]$ (toujours avec Rolle) et P' ne s'annule pas sur $[\,\alpha, \beta]$, sauf peut-être en a (zéro d'ordre $p \geq 2$), par continuité elle reste non nulle sur un voisinage de α, et sur un voisinage de β .
  Il existe alors $\eta > 0$ tel que N_P soit C^1 (au moins) sur un intervalle $]\alpha - \eta, \beta + \eta[$
  avec un seul problème éventuel en a. Donc : $\boxed{N_P(\alpha) \in [\,\alpha, \beta]}$ par continuité.
  Mais si $N_P(\alpha) \in]\,\alpha, \beta[$, la suite de Newton de $N_P(\alpha)$ serait bien définie et convergerait vers a celle de α aussi (simple décallage) donc $\alpha \in]\,\alpha, \beta[$ absurde . D'où $N_P(\alpha) = \alpha$ ou β
  $N_P(\alpha) = \alpha$ en un point α où $P'(\alpha) \neq 0$ entrainerait $P(\alpha) = 0$ qu'on a exclu. $\boxed{N_P(\alpha) = \beta}$

De même $\boxed{N_P(\beta) = \alpha}$ Les extrémités du bassin immédiat d'un zéro de P constituent un 2-cycle.

- Si ce 2-cycle était attractif : en notant $M_P = N_P \circ N_P$ on aurait $M_P(\alpha) = \alpha$ et $M'_P(\alpha) < 1$
  M_P étant C^1 au voisinage de α, elle resterait strictement contractante sur un $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ où $\varepsilon > 0$
  Pour $x \in]\alpha, \alpha + \varepsilon]$ la suite extraite de la suite de Newton $(x_{2n})_{n \in N}$ convergerait vers α, ce qui contredit
  la définition de $I(a) =]\,\alpha, \beta[$ puisque $x_n \to a$. $\boxed{\text{Ce 2-cycle ne peut être attractif.}}$

I.F - On a : $\beta - \alpha = -\dfrac{P(\alpha)}{P'(\alpha)}$ et $\alpha - \beta = -\dfrac{P(\beta)}{P'(\beta)}$ avec $P(\alpha)P'(\alpha)P(\beta)P'(\beta) \neq 0$

$\dfrac{P(\alpha)}{P'(\alpha)}$ et $\dfrac{P(\beta)}{P'(\beta)}$ sont de signes opposés, $\boxed{P(\alpha)P'(\alpha)P(\beta)P'(\beta) < 0}$

N_P est C^1 (au moins) sur un intervalle $]\alpha - \eta, \beta + \eta[$ et pour $x > \alpha$ $\quad \dfrac{N_P(x) - N_P(\alpha)}{x - \alpha} = \dfrac{N_P(x) - \beta}{x - \alpha} < 0$
par passage à la limite quand $x \to \alpha^+$ on assure : $N'_P(\alpha) \leq 0$. Mais $N'_P(\alpha) = 0$ rendrait le 2-cycle (α, β) super-attractif, ce qu'il n'est pas : $\boxed{N'_P(\alpha) < 0}$ De même : $\dfrac{N_P(\beta) - N_P(x)}{\beta - x} = \dfrac{\alpha - N_P(x)}{\beta - x} < 0$
et $\boxed{N'_P(\beta) < 0}$ D'où : $\boxed{P(\alpha)P''(\alpha)P(\beta)P''(\beta) > 0}$

- **Premier cas** : si P' ne s'annule pas sur $[\,\alpha, \beta]$ (elle ne pourrait s'annuler qu'en a)

$P'(\alpha)$ et $P'(\beta)$ ont même signe, $P'(\alpha)P'(\beta) > 0$ d'où $P(\alpha)P(\beta) < 0$ et $\boxed{P''(\alpha)P''(\beta) < 0}$

il existe $\boxed{c \in]\alpha, \beta[\text{ où } P''(c) = 0}$

- **Second cas** : si P' s'annule sur $[\alpha, \beta]$ elle ne s'annule qu'en a :

$N_P'(\alpha) < 0$ alors que $N_P'(a) = \dfrac{p-1}{p} > 0$ il existe $\boxed{c \in]\alpha, a[\text{ où } N_P'(c) = 0 \text{ donc } P''(c) = 0}$

I.G - P admet $d = d^\circ(P)$ racines réelles distinctes ordonnées : $(a_k)_{1 \le k \le d}$. Entre deux zéros successifs de P :

il existe un zéro de P' qui admet donc $d-1$ racines réelles distinctes : $(\xi_k)_{1 \le k \le d-1}$ avec $\xi_k \in]a_k, a_{k+1}[$

de même P'' admet $d-2$ racines réelles distinctes : $(\zeta_k)_{1 \le k \le d-2}$ où $\zeta_k \in]\xi_k, \xi_{k+1}[$

Le bassin immédiat de $a_1 = a^-$ est $]-\infty, \xi_1[$ et ne contient pas de zéros de P'', de même celui de $a_d = a^+$

Pour $k \in \{1, \cdots, d-2\}$ le bassin immédiat de a_{k+1} est de la forme $]\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}[$, ne contient pas de racine de P'

(P n'a pas de racines multiples) mais contient une racine de P'' : $\zeta_k \in]\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}[\subset]\xi_k, \xi_{k+1}[$

$\boxed{N_P \text{ attire tout zéro } P'' \text{ vers un zéro de } P}$

Partie II - Etude algébrique

II.A - Pour $d = 1$ $N_P(X) = R(X) = -\dfrac{p_1}{p_0}$ pour $P(X) = p_1 X + p_0$ et (*) n'est pas vraie : $d^\circ(Q) = d - 1$

On supposera donc $\boxed{d \ge 2}$ et $P(X) = p_d X^d + \cdots + p_1 X + p_0$

ainsi le terme de plus haut degré de $Q(X) = X\,P'(X) - P(X)$ vaut $(d-1)p_d X^d$ et $d^\circ(Q) = d$

$S = P'$ est de degré $d^\circ(S) = d - 1$

$PGCD(Q, S) = PGCD(P, P') = 1$ puisque P a d racines simples dans $\mathbb{C}$.

$R(z) = z$ et $R'(z) = \dfrac{P(z)P''(z)}{[P'(z)]^2} = 0$ pour une racine de P $\boxed{R \text{ vérifie } (*)}$

II.B - Notons $(z_k)_{1 \le k \le d}$ les points fixes de R et P le polynôme : $\boxed{P(X) = \prod_{1 \le k \le d} (X - z_k)}$

La fraction rationnelle $R(X) - X = \dfrac{Q(X) - X.S(X)}{S(X)}$ s'annule sur les $(z_k)_{1 \le k \le d}$ distincts, son numérateur

aussi, et $d^\circ(Q(X) - X.S(X)) \le d$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\boxed{Q(X) - X.S(X) = \lambda.P(X)}$

et $\boxed{\lambda \neq 0}$ car sinon $PGCD(Q, S) = S$

Alors : $R(X) = X + \dfrac{\lambda.P(X)}{S(X)}$ et $R'(X) = 1 + \lambda.\dfrac{P'(X)S(X) - S'(X)P(X)}{[S(X)]^2}$ est nul sur les $(z_k)_{1 \le k \le d}$

$\lambda.\left[P'(X)S(X) - S'(X)P(X)\right] + [S(X)]^2$est nul sur les $(z_k)_{1 \le k \le d}$ distincts, et dans $\mathbb{C}_{2d-2}[X]$

C'est donc un multiple de $P(X)$, avec un quotient $U(X)$ dans $\mathbb{C}_{d-2}[X]$

ainsi avec $Q - X.S = \lambda.P$ $\lambda.\left[\lambda.P'S - S'(Q - X.S)\right] + \lambda.S^2 = U.\left[Q - X.S\right]$

d'où : $\left[\lambda.S + \lambda^2.P' + \lambda.X.S' + X.U\right] S = \left[U + \lambda.S'\right] Q$

mais $PGCD(Q, S) = 1$ donc S de degré $d - 1$ divise $[U + \lambda.S']$ de $\mathbb{C}_{d-2}[X]$

d'où : $U + \lambda.S' = 0$ et $\lambda.S + \lambda^2.P' = 0$ d'où $\boxed{S = -\lambda.P'}$

Ainsi : $\boxed{R(X) = X + \dfrac{P(X)}{P'(X)} \quad \text{pour } P(X) = \prod_{1 \le k \le d} (X - z_k)}$

II.C - $a \neq 0$ la fonction réciproque de T est définie sur C par $T^{-1}(z) = \dfrac{1}{a}\,z - \dfrac{b}{a}$ c'est aussi une similitude.

Remarque : la relation de similitude est une **relation d'équivalence** (réflexive, symétrique et transitive)

Notons : $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid P'(z) \neq 0\}$ c'est le domaine de définition de N_P (aux pôles multiples près)

Le polynôme $P \circ T$ est définie par $P \circ T\,(X) = P(a.X + b)$ et donc $(P \circ T)\,'(X) = a.P'(a.X + b)$

ainsi sur $\mathcal{D}' = T^{-1}(\mathcal{D})$

$T \circ N_{P \circ T}(z) = a.\left[z - \dfrac{P(a.z + b)}{a.P'(a.z + b)}\right] + b = (a.z + b) - \dfrac{P(a.z + b)}{P'(a.z + b)} = N_P(a.z + b)$

donc : $\boxed{T \circ N_{P \circ T} = N_P \circ T \quad \text{ainsi} \quad N_{P \circ T} \text{ et } N_P \text{ sont semblables}}$

II.D - Remarquons que $\boxed{\forall \lambda \neq 0 \quad N_{\lambda.P} = N_P}$

- Pour $Q_1(X) = X^2$ on a : $N_{Q_1}(X) = \dfrac{X}{2}$

Pour $Q_2(X) = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ on a : $N_{Q_2}(X) = \dfrac{X}{2} + \dfrac{1}{2X}$

- Si P est un polynôme de degré 2, $P(X)=\alpha.X^2+\beta.X+\gamma$ où $\alpha\neq 0$
  il admet dans $\mathbb{C}$ $\begin{cases}\text{premier cas : une racine double } z_1 & P(X)=\alpha.(X-z_1)^2\\ \text{second cas : deux racines distinctes } z_1 \text{ et } z_2 & P(X)=\alpha.(X-z_1)(X-z_2)\end{cases}$

Dans le premier cas : $T(z)=z+z_1$ est une similitude, et $P\circ T\,(X)=\alpha.Q_1(X)$

$\boxed{N_P \text{ est semblable à } N_{P\circ T}=N_{\alpha.Q_1}=N_{Q_1}}$ associée à la fraction rationnelle : $\dfrac{X}{2}$

Dans le second cas : on cherche T qui envoie le couple $(1,-1)$ sur (z_1,z_2) soit $\begin{cases}a+b=z_1\\-a+b=z_2\end{cases}$

Si l'on prend : $\boxed{a=\dfrac{1}{2}[z_1-z_2] \text{ et } b=\dfrac{1}{2}[z_1+z_2] \text{ et } T(X)=a.X+b}$

alors : $P\circ T\,(X)\in\mathbb{C}_2[X]$, $P\circ T\,(1)=P(z_1)=0$ $P\circ T\,(-1)=P(z_2)=0$

et son coefficient dominant vaut $\alpha.a^2\neq 0$ d'où : $\boxed{P\circ T\,(X)=\alpha.a^2.Q_2(X)}$

$\boxed{N_P \text{ est semblable à } N_{P\circ T}=N_{\alpha.a^2.Q_2}=N_{Q_2}}$ associée à la fraction rationnelle : $\dfrac{X}{2}+\dfrac{1}{2.X}$

II.E - Posons : $P(X)=\alpha.X^3+\beta.X^2+\gamma.X+\delta$ où $\alpha\neq 0$

Premier cas : P admet une racine triple z_1 $P(X)=\alpha.(X-z_1)^3$

$T(z)=z+z_1$ est une similitude, et $P\circ T\,(X)=\alpha X^3$

$\boxed{N_P \text{ est semblable à } N_{P\circ T}=N_{\alpha.X^3}=N_{X^3} \text{ associée à la fraction rationnelle : } \dfrac{2.X}{3}}$

Deuxième cas : P admet une racine double z_1 et une simple z_2 $P(X)=\alpha.(X-z_1)^2(X-z_2)$

On peut choisir $\boxed{a=\dfrac{1}{3}[z_1-z_2] \text{ et } b=\dfrac{1}{3}[2.z_1+z_2] \text{ et } T(X)=a.X+b}$ alors $T(1)=z_1$ et $T(-2)=z_2$ d'où : $P\circ T\,(1)=0$ $P\circ T\,(-2)=0$ et $(P\circ T)'\,(1)=a.P'(z_1)=0$

d'où : $\boxed{P\circ T\,(X)=\alpha.a^3.P_{-2}(X)=\alpha.a^3.(X-1)^2(X+2)=\alpha.a^3.\left[X^3-3.X+2\right]}$

$\boxed{N_P \text{ est semblable à } N_{P\circ T}=N_{\alpha.a^2.P_{-2}}=N_{-2}}$ égale à $\dfrac{2.(X^3-1)}{3(X^2-1)}=\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{X^2+X+1}{X+1}\right]$ **Troisième cas** : P admet trois racines simples : z_1, z_2 et z_3

Il n'y a pas de similitude appliquant les racines $(1,u_2,u_3)$ de P_m sur les racines (z_1,z_2,z_3) de P

une similitude conserve les angles, et ces deux triangles n'ont pas, a priori, les mêmes angles.

Cherchons brutalement s'il existe $(a,b,m,\lambda)\in\mathbb{C}^4$ tels que $P_m\circ T=\lambda.P$ ($a\neq 0$ et $\lambda\neq 0$)

$a^3X^3+3a^2b.X^2+\left[3ab^2+a(m-1)\right].X+\left[b^3+b(m-1)-m\right]=\lambda\left[\alpha.X^3+\beta.X^2+\gamma.X+\delta\right]$

d'où : $\lambda=\dfrac{a^3}{\alpha}$, $b=\dfrac{a\beta}{3\alpha}$, $m=1+a^2\left[\dfrac{3\alpha\gamma-\beta^2}{3\alpha^2}\right]$ avec les trois premières relations

dans la $4^{ième}$ a doit vérifier : $a^3\left[27\alpha^2\delta+2\beta^3-9\alpha\beta\gamma\right]+9a^2\alpha\left[3\alpha\gamma-\beta^2\right]+27\alpha^3=0$

ce qui est possible car $\left[27\alpha^2\delta+2\beta^3-9\alpha\beta\gamma\right]$ et $\alpha\left[3\alpha\gamma-\beta^2\right]$ ne sont pas simultannément nuls

puisque l'unique racine de P'' qui vaut $\zeta=-\dfrac{\beta}{3\alpha}$ n'est pas racine de P et P' simultannément.

On peut donc trouver (a,b,m,λ) convenables ($a\neq 0$ et $\lambda\neq 0$) et $\boxed{N_P \text{ est semblable à } N_m}$

II.F - Les suites récurrentes définies par $\begin{cases}x_0=z\in\mathbb{C} & \text{donné et}\\ \forall n\in\mathbb{N} & x_{n+1}=R(x_n)\end{cases}$ de deux fractions rationnelles R et S semblables, se correspondent par similitude :

si $\forall n\in\mathbb{N}$ $y_n=T^{-1}(x_n)$ alors $\forall n\in\mathbb{N}$ $y_{n+1}=T^{-1}\circ R\circ T\,(y_n)=S(y_n)$

Donc leur comportement dynamique : convergence, cycles, attractivité etc... se conservent.

Pour étudier **tous les comportements dynamiques** des suites de Newton des polynômes de $\mathbb{C}_3[X]$,

il suffit d'étudier ceux des suites récurrentes associées aux fonctions :

$$\boxed{z\longmapsto\frac{z}{2}\ ,\ z\longmapsto\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}\ ,\ z\longmapsto\frac{2z}{3} \text{ et pour } m\in C \quad z\longmapsto\frac{2\,z^3+m}{3\,z^2+m-1}}$$

Partie III - Etude analytique du cas cubique réel

III.A.1) - $z_1=1$ est racine apparente de $P_m(X)=(X-1)(X^2+X+m)$ qui aura donc trois racines complexes distinctes, si et seulement si

(1 n'est pas racine de (X^2+X+m)) et ((X^2+X+m) n'a pas de racine double)

si et seulement si $\boxed{(\ m\neq -2) \text{ et } \left(m\neq\dfrac{1}{4}\right)}$

III.A.2) - Pour $m>1$ la dérivée $P'_m(x)=3.\,x^2+m-1$ reste strictement positive sur $\mathbb{R}$.

P_m est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une fois en $x = 1$. $(\ 1 - 4m < 0\ )$

N_m est donc C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $N'_m(x) = \dfrac{P''_m(x)P_m(x)}{[P'_m(x)]^2} = \dfrac{6\,x\,(x-1)(x^2+x+m)}{[3.\,x^2+m-1]^2}$ du signe de $x(x-1)$

D'où le tableau de variations de N_m :

x	$-\infty$		0		1		∞
$N'_m(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$N_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{m}{m-1}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	∞

De plus $N_m(x) - x = \dfrac{(1-x)(x^2+x+m)}{3.\,x^2+m-1}$ est du signe de $(1-x)$ et ne s'annule qu'en $x = 1$

$\boxed{\ell = 1}$ est **la seule limite éventuelle possible** des suites de Newton de P_m (N_m continue sur $\mathbb{R}$)

L'intervalle $[1, \infty[$ est **stable** :

si $x_{n_0} \in [1, \infty[$ la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ est alors décroissante ($x_{n+1} - x_n = N_m(x_n) - x_n < 0$)
et minorée par 1 $(x_n \in [1, \infty[) \Longrightarrow (x_{n+1} = N_m(x_n) \in [1, \infty[)$. Elle converge vers $\ell = 1$.

si $x = x_0 \in]-\infty, 1[$ la suite est d'abord croissante ($x_{n+1} - x_n = N_m(x_n) - x_n > 0$) .
si elle reste majorée par 1, elle reste croissante et majorée : elle converge vers $\ell = 1$
si elle dépasse 1 le raisonnemenr précédent assure le même résultat.

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ la suite de Newton de } x \text{ converge vers } \ell = 1}$

III.B.1) - Le discriminant de $x^2 + x + m$ vaut $1 - 4m$

- Si $m' < \dfrac{1}{4}$

  $x^2 + x + m = 0$ admet deux racines réelles distinctes : $a_{m'} \in \left]\dfrac{-1}{2}, \infty\right[$ et $b_{m'} \in \left]-\infty, \dfrac{-1}{2}\right[$

  $$\boxed{a_{m'} = \frac{-1}{2}\left[1 - \sqrt{1-4m'}\right] \text{ et } b_{m'} = \frac{-1}{2}\left[1 + \sqrt{1-4m'}\right]}$$

  La seule qui puisse être égale à 1 est $(\ a_{m'} = 1) \Longleftrightarrow \left(1 - \sqrt{1-4m'} = -2\right) \Longleftrightarrow (m' = -2)$

Si $m' < \dfrac{1}{4}$ et $m' \neq -2$: P_m possède trois racines réelles distinctes $1, a_{m'}, b_{m'}$

- Soit $m' < 0$ la fraction rationnelle : $N_{m'}(z) = \dfrac{2\,z^3 + m'}{3\,z^2 + m' - 1}$ est définie sur $\mathcal{D}_{m'} = \mathbb{C} \setminus \left\{x_0^-, x_0^+\right\}$

  avec $x_0^+ = \sqrt{\dfrac{1-m'}{3}}$ et $x_0^- = -x_0^+$

On cherche $a \neq 0$, b et $m \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$ tels que **(**)** $\boxed{\forall z \in D_{m'} \quad a.N_{m'}(z) + b = N_m(az+b)}$

La similitude doit d'abord conserver les **pôles** des deux fractions rationnelles :

$$\left.\begin{array}{l} \left(a\sqrt{\frac{1-m'}{3}} + b = \sqrt{\frac{1-m}{3}} \quad , \ -a\sqrt{\frac{1-m'}{3}} + b = -\sqrt{\frac{1-m}{3}}\right) \\ \text{ou } \left(a\sqrt{\frac{1-m'}{3}} + b = -\sqrt{\frac{1-m}{3}} \ , \ -a\sqrt{\frac{1-m'}{3}} + b = \sqrt{\frac{1-m}{3}}\right) \end{array}\right\} \text{d'où } \left\{\begin{array}{l} \boxed{b = 0} \\ \boxed{a = \pm\sqrt{\dfrac{1-m}{1-m'}}} \end{array}\right.$$

Puis pour $z^3 = -\dfrac{m'}{2}$: $a.N_{m'}(z) + b = 0$ donc $2\,(az)^3 + m = 0$ d'où : $\boxed{a^3 = \dfrac{m}{m'}}$ et a réel.

ainsi : $\boxed{m = 1 + a^2 m' - a^2 = a^3 m'}$ sont des conditions **nécessaires**.

Or **(**)** équivaut à **:** $a\left(\ 2\,X^3 + m'\right)\left(3\,(aX)^2 + m - 1\right) = \left(2\,(aX)^3 + m\right)\left(\ 3\,X^2 + m' - 1\right)$

donc à $2a(m-1) = 2a^3(m'-1)$, $3a^3m' = 3m$ et $am'(m-1) = m(m'-1)$

Nos conditions nécessaires sont **suffisantes**.

On obtient : $a^3m' + a^2(1-m') - 1 = (a-1)(a^2m' + a + 1) = 0$ et **trois possibilités** pour a :

- $a = 1$ avec $b = 0$ donne $m = m'$ **sans intérêt**.
- $a = \dfrac{-1}{2m'}\left[1 - \sqrt{1-4m'}\right] = \dfrac{-2}{1 + \sqrt{1-4m'}}$ parcourt $\left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$ quand $m' \in]-\infty, -2[$

  et parcourt $\left]-1, -\dfrac{1}{2}\right[$ quand $m' \in]-2, 0[$ et donne $m = 1 + a^2m' - a^2 = -(a + a^2)$

  $-\left(a + a^2\right)$ de dérivée $-(2a+1)$ est croissante sur $\left]-1, -\dfrac{1}{2}\right[$ et décroissante sur $\left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$

  donc m croit de 0 à $\dfrac{1}{4}$ puis décroit de $\dfrac{1}{4}$ à 0 il reste dans $\left]0, \dfrac{1}{4}\right[$ donc **convient**
- $a = \dfrac{-1}{2m'}\left[1 + \sqrt{1-4m'}\right]$ qu'on laisse inutile.

$$\boxed{\text{Pour } m' < 0 \text{ et } m' \neq -2 \;\text{ il existe } m \in \left]0, \frac{1}{4}\right[\;\text{ tel que }\; N_{m'} \text{ soit semblable à } \; N_m}$$

III.B.3) - $m \in \left[0, \frac{1}{4}\right[$ et $x_0^+ = \sqrt{\frac{1-m}{3}}$ et $x_0^- = -x_0^+$ sont les racines de P'_m , et pôles de N_m.

Montrons d'abord :$\left(b_m < x_0^-\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{-1}{2}\left[1 + \sqrt{1-4m}\right] < -\sqrt{\frac{1-m}{3}}\right)$ qui équivaut à

$\left(2 - 4m + 2\sqrt{1-4m} > \frac{4}{3}(1-m)\right) \Longleftrightarrow \left(\sqrt{1-4m} > \frac{1}{3}(4m-1)\right)$ **vrai**

car $4m - 1 < 0$.

De plus $\left(m \in \left[0, \frac{1}{4}\right[\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{1-m}{3} \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]\right) \Longleftrightarrow \left(\sqrt{\frac{1-m}{3}} \in \left]\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right)$

D'où $\boxed{\text{pour } \; m \in \left[0, \frac{1}{4}\right[\qquad -1 < b_m < x_0^- < -\frac{1}{2} < a_m \leq 0 < \frac{1}{2} < x_0^+ < 1}$

Alors : $P(x) = (x-1)(x-a_m)(x-b_m)$ et $N'_m(x) = \dfrac{P(x)P''(x)}{\left[P'(x)\right]^2} = \dfrac{2x(x-1)(x-a_m)(x-b_m)}{3\left[(x-x_0^+)(x-x_0^-)\right]^2}$

d'où : $N''_m(x) = \dfrac{P''(x)}{P'(x)} + \dfrac{P(x)}{\left[P'(x)\right]^3}\left[P'(x)P'''(x) - 2\left[P''(x)\right]^2\right]$ sur $\left]x_0^-, x_0^+\right[$

avec $P'(x)P'''(x) - 2\left[P''(x)\right]^2 = 6\left[3x^2 + m - 1\right] - 72x^2 = 6\left[(m-1) - 9x^2\right] < 0$

- sur $\left]x_0^-, a_m\right[$ $\boxed{N'_m(x) < 0}$ et $P(x) > 0$, $P'(x) < 0$, $P''(x) < 0$ d'où $\boxed{N''_m(x) > 0}$
- sur $\left]0, x_0^+\right[$ $\boxed{N'_m(x) < 0}$ et $P(x) < 0$, $P'(x) < 0$, $P''(x) > 0$ d'où $\boxed{N''_m(x) < 0}$

III.B.4) - Etudions les **variations** de $x \longmapsto N_m(x) = \dfrac{2\,x^3 + m}{3\,(x-x_0^+)(x-x_0^-)}$ fraction rationnelle

$N'_m(x) = \dfrac{2x(x-1)(x-a_m)(x-b_m)}{3\left[(x-x_0^+)(x-x_0^-)\right]^2}$ et on a une asymptote oblique : $y = \frac{2}{3}x$

x	$-\infty$		b_m		x_0^-
N'_m		$+$	0	$-$	
N_m	$-\infty$	$\nearrow$	b_m	$\searrow$	$-\infty$

x	x_0^-		x_1^-		a_m		0		x_1^+		x_0^+
N'_m		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
N_m	∞	$\searrow$	x_0^+	$\searrow$	a_m	$\nearrow$	$\frac{m}{m-1}$	$\searrow$	x_0^-	$\searrow$	$-\infty$

x	x_0^+		1		∞
N'_m		$-$	0	$+$	
N_m	∞	$\searrow$	1	$\nearrow$	∞

Sur $\left]x_0^-, a_m\right[$ N_m décroit de $+\infty$ vers a_m (une racine de P_m est un point fixe de N_m)

elle prend donc une fois et une seule la valeur x_0^+ en un point $x_1^- \in \left]x_0^-, a_m\right[$ $\boxed{N_m(x_1^-) = x_0^+}$

Sur $]a_m, 0[$ N_m croit de a_m à $\frac{m}{m-1} \geq a_m$. Puis sur $\left]0, x_0^+\right[$ N_m décroit de $\frac{m}{m-1}$ vers $-\infty$

elle prend donc une fois et une seule la valeur x_0^- en un point $x_1^+ \in \left]0, x_0^+\right[$ $\boxed{N_m(x_1^+) = x_0^-}$

Sur $\left]x_1^-, x_1^+\right[\subset \left]x_0^-, x_0^+\right[$ N_m prend des valeurs dans $\left]x_0^-, x_0^+\right[$

donc $\boxed{M_m = N_m \circ N_m \text{ est bien définie et de classe } C^\infty \text{ sur } \left]x_1^-, x_1^+\right[}$

Par composition : M_m est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\left\{x_0^-, x_0^+, x_1^-, x_1^+\right\}$ et $\boxed{M'_m(x) = N'_m(x) \times N'_m\left(N_m(x)\right)}$

qui s'annule donc aux zéros de N'_m $\{b_m, a_m, 0, 1\}$ et aux antécédents par N_m de ces zéros.

- $N_m\left(\left]-\infty, x_0^-\right[\right) \subset \left]-\infty, b_m\right]$ et M'_m ne s'annule sur $\left]-\infty, x_0^-\right[$ qu'en b_m
- $N_m\left(\left]x_0^+, \infty\right[\right) \subset [1, \infty[$ et M'_m ne s'annule sur $\left]x_0^+, \infty\right[$ qu'en 1
- Sur $\left]x_0^-, x_1^-\right[$ M_m décroit d'abord de $+\infty$ jusqu'à 1 valeur prise une seule fois par N_m qui décroit de ∞ à x_0^+ , puis M_m croit vers ∞
- Sur $\left]x_1^+, x_0^+\right[$ M_m croit d'abord de $-\infty$ jusqu'à b_m valeur prise une seule fois par N_m qui décroit de x_0^- à $-\infty$, puis M_m décroit vers - ∞

L'énoncé semble limiter l'étude à $\left]x_1^-, x_1^+\right[$

$$\boxed{M''_m(x) = N''_m(x) \times N'_m\left(N_m(x)\right) + \left[N'_m(x)\right]^2 \times N''_m\left(N_m(x)\right)}$$

- Sur $\left]x_1^-, a_m\right]$ N_m décroit strictement de x_0^+ jusqu'à a_m et s'annule une seule fois en ξ^-

  $\boxed{N_m(\xi^-) = 0}$ et $M'_m(\xi^-) = 0$ car $N'_m\left(N_m(\xi^-)\right) = N'_m(0) = 0$

  Sur $\left]x_1^-, \xi^-\right[$ N_m décroit strictement de x_0^+ jusqu'à 0 et N'_m est négative et **décroit** sur $\left]0, x_0^+\right[$

  $N''_m(x) > 0$, $N'_m\left(N_m(x)\right) < 0$, $\left[N'_m(x)\right]^2 > 0$ et $N''_m\left(N_m(x)\right) < 0$ donc $\boxed{M''_m(x) < 0}$
- Sur $\left]0, x_1^+\right]$ N_m décroit strictement de $\frac{m}{m-1}$ jusqu'à x_0^- et prend une fois la valeur a_m en ξ^+

  $\boxed{N_m(\xi^+) = a_m}$ et $M'_m(\xi^+) = 0$ car $N'_m\left(N_m(\xi^+)\right) = N'_m(a_m) = 0$

Sur $]\xi^+, x_1^+[$ N_m décroit strictement de a_m jusqu'à x_0^- et N'_m est négative et **croit** sur $]x_0^-, a_m[$

$N''_m(x) < 0$, $N'_m(N_m(x)) < 0$, $[N'_m(x)]^2 > 0$ et $N''_m(N_m(x)) > 0$ donc $\boxed{M''_m(x) > 0}$

III.B.5) - Variations de N_m sur $[\xi^-, \xi^+]$:

et $\frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} \in \left]-\frac{1}{3}, 0\right]$

donc $N_m([\xi^-, \xi^+]) = [a_m, 0]$

lui même **stable** par N_m

x	ξ^-		a_m		0		ξ^+
N'_m		$-$	0	$+$	0	$-$	
N_m	0	$\searrow$	a_m	$\nearrow$	$\frac{m}{m-1}$	$\searrow$	a_m

Ensuite : $N_m(x) - x = -\dfrac{P(x)}{P'(x)} < 0$ sur $[a_m, 0]$ donc la suite est **décroissante**, pour $n \geq 1$

et **minorée** par a_m, elle converge donc vers une limite ℓ dans $[a_m, 0]$ racine de P_m $\boxed{\ell = a_m}$

ainsi : $\boxed{[\xi^-, \xi^+] \subset]\alpha(m), \beta(m)[}$

III.B.6) - $x \in \left\{x_0^-, x_0^+, x_1^-, x_1^+\right\}$ ne définit pas une suite de Newton pour P_m

(de même qu'une infinité dénombrable d'autres valeurs initiales interdites)

1^{er} cas : Si $x > x_0^+$ alors $1 \leq N_m(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $1 \leq N_m(x_n)$ d'où $x_{n+1} - x_n = -\dfrac{P(x_n)}{P'(x_n)} < 0$

la suite est décroissante et minorée : **elle converge** vers 1

$2^{ème}$ cas : $x < x_0^-$ alors $N_m(x) \leq b_m$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $N_m(x_n) \leq b_m$ d'où $x_{n+1} - x_n = -\dfrac{P(x_n)}{P'(x_n)} > 0$

la suite est croissante et majorée : **elle converge** vers b_m

$3^{ème}$ cas : $x \in]x_0^-, x_1^-[$ alors $x_1 > x_0^+$ et on est ramené au 1^{er} cas

$4^{ème}$ cas : $x \in]x_1^+, x_0^+[$ alors $x_1 < x_0^-$ et on est ramené au $2^{éme}$ cas

$5^{ème}$ cas : $\boxed{\text{Dans }]x_1^-, x_1^+[}$

Il n'y a pas de 2-cycle dans $[\xi^-, \xi^+]$, où les suites **convergent** vers a_m.

$(\alpha(m), \beta(m))$ est un 2-cycle de N_m et donc $x_1^- < \alpha(m) < \xi^- < \xi^+ < \beta(m) < x_1^+$

si $x \in]\alpha(m), \beta(m)[$ la suite **converge** vers a_m

Rappellons que ce cycle ne peut être attractif (question **I.E.2)**) donc $\begin{cases} M'_m(\alpha(m)) \geq 1 \\ M'_m(\beta(m)) \geq 1 \end{cases}$

S'il y avait un autre 2-cycle de N_m : (x, y) on aurait : $x_1^- < x < \alpha(m) < \beta(m) < y < x_1^+$

x est un point fixe de M_m et $\begin{cases} M_m(x) = x \\ M_m(\alpha(m)) = \alpha(m) \end{cases}$ $x < \alpha(m)$ avec le théorème

des valeurs intermédiaires sur $]x, \alpha(m)[$, entrainerait : $\exists c \in]x, \alpha(m)[$ tel que $M'_m(c) = 1$

ce qui contredirait la stricte décroissance assurée en **III.B.4)**

$\boxed{\text{Il n'y a pas d'autre 2-cycle pour } N_m}$

III.B.7) - Pour $\boxed{m = 0}$ alors $a_m = 0$, $N_0(x) = \dfrac{2x^3}{3x^2 - 1}$ est impaire donc M_0 est aussi impaire.

Si $\alpha(0) \neq -\beta(0)$ alors : $N_0(-\alpha(0)) = -\beta(0)$ assurerait l'existence d'un autre 2-cycle pour N_0

Ceci est exclu, donc $\boxed{\alpha(0) = -\beta(0)}$

Ainsi $\alpha \neq a_m = 0$ entraine $\left(N_0(\alpha) = \dfrac{2\alpha^3}{3\alpha^2 - 1} = -\alpha\right) \Longrightarrow \left(\alpha^2 = \dfrac{1}{5}\right)$ d'où $\boxed{\alpha(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

III.B.8) - Pour $F(m, x) = M_m(x) - x$ On a une fraction rationnelle de dénominateur :

$D(m, x) = (3x^2 + m - 1)\left[3\left(2x^3 + m\right)^2 + (m-1)(3x^2 + m - 1)^2\right]$

F est C^∞ sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ des points où $D(m, x) \neq 0$

$\boxed{\text{Notons } U_0 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ alors } U_0 \in \Omega \text{ et } F\left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0}$

$G(m) = F\left(m, -\frac{1}{\sqrt{5}} + u\, m\right)$ est par composition C^∞ au voisinage de 0, on peut appliquer Taylor-Young,

et l'énoncé nous en donne un développement limité, par unicité : $G'(0) = 35\, u + \dfrac{25 - 7\sqrt{5}}{2}$

Ceci pour tout u fixé. Mais $G'(m) = \dfrac{\partial F}{\partial m}\left(m, -\frac{1}{\sqrt{5}} + u\, m\right) + u\, \dfrac{\partial F}{\partial x}\left(m, -\frac{1}{\sqrt{5}} + u\, m\right)$

$G'(0) = \dfrac{\partial F}{\partial m}(U_0) + u\, \dfrac{\partial F}{\partial x}(U_0)$ par égalité comme fonction de u, on obtient :

$\boxed{\dfrac{\partial F}{\partial m}(U_0) = \frac{25 - 7\sqrt{5}}{2} \qquad \dfrac{\partial F}{\partial x}(U_0) = 35}$

Le théorème des fonctions implicites s'applique donc en $U_0 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ et assure l'existence d'une fonction g définie et C^1 sur un $]-\varepsilon, \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$, telle que au voisinage V de U_0

$\boxed{(F(m,x) = 0) \Longleftrightarrow (x = g(m))}$

Or $(F(m,x) = 0) \Longleftrightarrow (M_m(x) = x)$ ce qui correspond soit à $(x, N_m(x))$ 2-cycle de N_m soit à x point fixe de N_m

$H(m,x) = N_m(x) - x = -\dfrac{x^3 + (m-1)x - m}{3x^2 + m - 1}$ vaut $H(U_0) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \dfrac{1 - \frac{1}{5}}{\frac{3}{5} - 1} > 0$

et reste strictement positive au voisinage de U_0 .

Donc x n'est pas point fixe de N_m, et $\boxed{x = \alpha(m)}$ le plus petit élément du cycle.

α est donc fonction C^1 de m au voisinage de 0, et avec le théorème des fonctions implicites

$\alpha'(0) = -\left[\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial m}(U_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(U_0)}\right]$ Par Taylor-Young $\boxed{\alpha(m) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{7\sqrt{5} - 25}{70} m + o(m)}$

III.C.1) - 0 est 2-périodique si et seulement si $\boxed{M_m(0) = 0 \text{ et } N_m(0) \neq 0}$

Ce qui équivaut à $2m^3 + m(m-1)^3 = 0$ et $m \neq 0$ Notons $h(m) = 2m^2 + (m-1)^3$

Alors $h'(m) = 4m + 3(m-1)^2 = 3m^2 - 2m + 3$ reste positif sur $\mathbb{R}$ $h'(m) > 0$

La fonction polynôme du troisième degré s'annule donc une fois et une seule sur $\mathbb{R}$,

$\boxed{\text{Il existe un seul } m_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que 0 soit 2-périodique pour } N_m}$

$h(0) = -1$ et $h(1) = 2$ donc $\boxed{m_0 \in]0,1[}$ et on peut continuer par **dichotomie**.

III.C.2) - $M'_{m_0}(0) = N'_{m_0}(0) \times N'_{m_0}(N_{m_0}(0)) = 0$ car le premier terme est nul

Et $F(m_0, 0) = M_m(0) - 0 = 0$ pour $(m_0, 0) \in \Omega$

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(m_0, 0) = M'_{m_0}(0) - 1 = -1 \neq 0$ On peut appliquer le théorme de Fonctions implicites.

Il existe une fonction φ définie et C^1 au voisinage de m_0 telle que :

$(M_m(x) = x) \Longleftrightarrow (x = \varphi(m))$ et $\varphi(m_0) = 0$

$N_{m_0}(0) \neq 0$ et par continuité : $N_m(\varphi(m)) \neq 0$ au voisinage de m_0

$M'_m(\varphi(m))$ est nul en m_0 donc reste strictement inférieur à 1 au voisinage de m_0

Ainsi il existe $\eta > 0$ tel que si $\lvert m - m_0 \rvert < \eta$ alors N_m admet un 2-cycle $(x, N_m(x))$ avec $x = \varphi(m)$ attractif, et qui attire 0 et ses itérés successifs.