

CENTRALE PC 2000 ÉPREUVE DE MATH 2

PREMIÈRE PARTIE

- I. A. 1. La fonction $x \mapsto px - kx^2 = x(p - kx)$ présente un maximum pour toute valeur de p au point d'abscisse $x = \frac{p}{2k}$ et il vaut $\frac{p^2}{2k}$.

Conclusion : $J(f) = \mathbb{R}$ et $g(p) = \frac{p^2}{4k}$. Le tracé de la courbe donne une simple parabole.

2. Soit $h(x) = px - e^x$, $h'(x) = p - e^x$.

- Si $p < 0$ alors h ne présente pas d'extremum.
- Si $p = 0$ alors h est majorée par 0 ($\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$).
- Si $p > 0$ alors h présente un maximum pour $x = \ln p$ et il vaut $p(\ln p - 1)$.

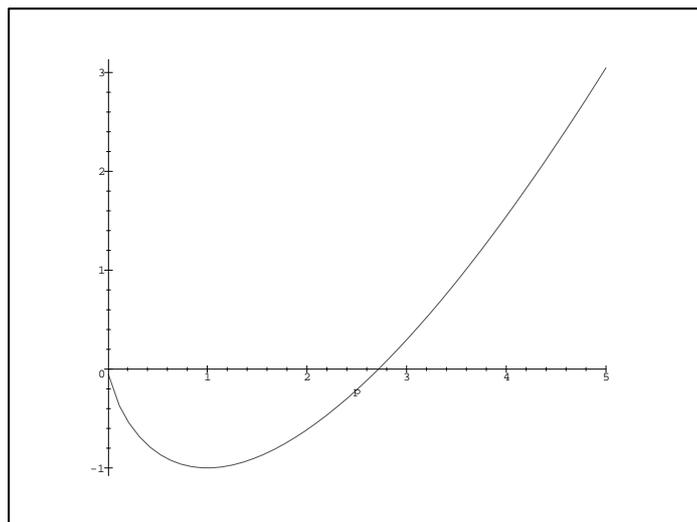
Conclusion : $J(f) = [0, +\infty[$ et $g(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0 \\ p(\ln p - 1) & \text{si } p > 0 \end{cases}$. On remarque

que g est continue en 0.

Étude de g : $g'(p) = \ln p$ d'où

p	0	1	$+\infty$
g'	$-\infty$	-	0 +
g	0	\searrow	-1 \nearrow $+\infty$

ce qui donne le tracé suivant (la tangente en 0 est verticale)



3. La fonction $h(x) = px - \text{Arctan } x$ est impaire.

- Si $p \neq 0$ alors elle n'est pas majorée.
- Si $p = 0$ alors elle est majorée par $\frac{\pi}{2}$.

Conclusion : $J(f) = \{0\}$ et $g(0) = \frac{\pi}{2}$.

- B. 1. Soient a et b deux éléments de $J(f)$ et $t \in [0, 1]$ alors, pour tout x de I , on écrit

$$\begin{array}{ll} ax - f(x) \leq g(a) & \times t \\ bx - f(x) \leq g(b) & \times (1 - t) \end{array}$$

d'où, en additionnant ces inégalités avec le multiplicateur mentionné, on obtient

$$[ta + (1 - t)b]x - f(x) \leq tg(a) + (1 - t)g(b) \quad (1)$$

ce qui signifie que $x \mapsto [ta + (1 - t)b]x - f(x)$ est majoré sur I et donc que $ta + (1 - t)b \in J(f)$ et en conclusion $J(f)$ est bien un intervalle.

2. Grâce à l'inégalité (1), on tire immédiatement l'inégalité

$$g(ta + (1 - t)b) \leq tg(a) + (1 - t)g(b)$$

ce qui permet de dire que g est convexe.

3. a) Montrons que g est croissante. Supposons que $a < b$ alors $ax - f(x) \leq bx - f(x)$ car $x \geq 0$. Cette inégalité étant vraie pour tout x de I , par passage à la borne supérieure (qui existe dans \mathbb{R}) on a

$$g(a) \leq g(b)$$

donc g est croissante (au sens large).

b) De même on prouve ici que g est décroissante.

- C. 1. Soit $h(x) = px - f(x)$, h est de classe \mathcal{C}^2 et $h'(x) = p - f'(x)$, $h''(x) = -f''(x) < 0$. f' est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. Si $I = (a, b)$ (intervalle noté de cette façon car on ne sait pas s'il contient ses bornes) et si $p \in]\alpha, \beta[$ on obtient le tableau de variation suivant :

x	a	$x(p)$	b
h''	-		
h'	$p - \alpha$	0	$p - \beta$
h	$h(x(p))$		

où $x(p)$ désigne le seul élément de l'intervalle I tel que $p = f'(x(p))$.

Conclusions : $p \in J(f)$ donc $] \alpha, \beta [\subset J(f)$ et, le maximum de h étant atteint en $x(p) = f'^{[-1]}(p)$, on a

$$g(p) = pf'^{[-1]}(p) - f(f'^{[-1]}(p)).$$

2. f' est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme, $x(p) = f'^{[-1]}(p)$ est dérivable donc la relation $p = f'(x(p))$ donne $1 = f''(x(p))x'(p)$ d'où

$$g'(p) = x(p) + p \frac{1}{f''(x(p))} - \frac{f'(x(p))}{f''(x(p))} = x(p).$$

3. Comme $f'(x(p)) = p$, la pente de la tangente au point $(x(p), f(x(p)))$ vaut p . Or $px(p) - f(x(p)) = g(p)$ par définition de g donc l'équation de la tangente en ce point admet l'équation

$$\begin{aligned} y - f(x(p)) &= p(x - x(p)) = px - px(p) \\ &= px - [px(p) - f(x(p))] - f(x(p)) \\ &= px - g(p) - f(x(p)) \end{aligned}$$

par conséquent la droite D_p est tangente au graphe de la fonction f .

4. a) Soit $f \in \mathcal{H}$, montrons que $g \in \mathcal{H}$.

- On a vu que $J(f)$ contient l'intervalle $] \alpha, \beta [$ avec ici $\alpha = -\infty$ et $\beta = +\infty$ donc $J(f) = \mathbb{R}$.

- g est définie sur \mathbb{R} et $g'(p) = x(p) = f'^{[-1]}(p)$. Or f' est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme car $f'' > 0$ donc g' est de classe \mathcal{C}^1 et par conséquent g est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
- On a vu en outre que $x'(p) = \frac{1}{f''(x(p))} > 0$ donc $g''(p) = x'(p) > 0$.
- Finalement, comme f' est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} sur \mathbb{R} on sait que $f'^{[-1]}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et en conclusion $g'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

b) On a donc

$$\forall (x, p) \in \mathbb{R}^2, px - f(x) \leq g(p)$$

ce qui s'écrit $px - g(p) \leq f(x)$ donc $f \geq \mathcal{L}(\mathcal{L}(f))$.

Mais, vu que $px(p) - g(p) = f(x(p))$ alors $f \leq \mathcal{L}(\mathcal{L}(f))$.

Conclusion : $f = \mathcal{L}(\mathcal{L}(f))$ soit $\mathcal{L} \circ \mathcal{L} = \text{Id}_{\mathcal{H}}$.

c) \mathcal{L} est involutive donc \mathcal{L} est une bijection de \mathcal{H} sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ et, en composant par \mathcal{L} , on a

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

soit $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ donc \mathcal{L} est une bijection de \mathcal{H} sur \mathcal{H} .

DEUXIÈME PARTIE

- II. 1. On sait que A est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. e_i est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_i > 0$, $Ae_i = \lambda_i e_i$ (en confondant la matrice A et l'endomorphisme de \mathbb{R}^n associé). Si $p = \sum_{i=1}^n q_i e_i$ alors

$$F(x) = \sum_{i=1}^n (q_i y_i - \lambda_i y_i^2).$$

On se sert alors du résultat du I.A.1 ; chaque fonction $f_i(y_i) = q_i - \lambda_i y_i^2$ est majorée par $\frac{q_i^2}{4\lambda_i}$ (les λ_i sont > 0) et le maximum est atteint pour $y_i = \frac{q_i}{2\lambda_i}$ donc F est majoré par

$$M = \sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{4\lambda_i}$$

et cette valeur est atteinte pour $x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\lambda_i} e_i$.

2. On vient de voir que

$$g(p) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{4\lambda_i} = {}^t P \frac{1}{4} A^{-1} P$$

(car A est inversible), on prend donc $B = \frac{1}{4} A^{-1}$.

Pour montrer que $h = f$ (ce qui est en accord avec le résultat de la question I.C.4.b.) il suffit de remarquer que $4AB = I_n$ relation qui est symétrique en A et B .

3. a) Évident car f est une forme quadratique.
b) On a

$$f(tp) = f(tp_1, \dots, tp_n) = t^2 f(p_1, \dots, p_n)$$

d'où, en dérivant par rapport à t ,

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}(tp) = 2t f(p)$$

et on obtient la formule annoncée en prenant $t = 1$.

4. On a vu au II.1. que $x(p) = \frac{1}{2}A^{-1}P$ et on cherche un résultat analogue à celui de la question I.C.2. soit $x(p) = \text{grad } g(p)$ ce qui est alors immédiat.

TROISIÈME PARTIE

III. A. 1. On écrit les égalités

$$\begin{aligned}
 F(tx_1 + (1-t)x_2) &= {}^tP(tx_1 + (1-t)x_2) - {}^t(tx_1 + (1-t)x_2)A(tx_1 + (1-t)x_2) \\
 &= t{}^tPX_1 + (1-t){}^tPX_2 - t^2 \cdot {}^tX_1AX_1 - t(1-t) \cdot {}^tX_1AX_2 \\
 &\quad - t(1-t) \cdot {}^tX_2AX_1 + (1-t)^2 \cdot {}^tX_2AX_2 \\
 &= tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + t(1-t) \cdot {}^tX_1AX_1 - t(1-t) \cdot {}^tX_1AX_2 \\
 &\quad + t(1-t) \cdot {}^tX_2AX_2 - t(1-t) \cdot {}^tX_2AX_1 \\
 &= tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + t(1-t) \cdot {}^tX_1A(X_1 - X_2) + t(1-t) \cdot {}^tX_2A(X_2 - X_1) \\
 &= tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + t(1-t) \cdot {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2)
 \end{aligned}$$

- (i) Soit $(x_1, x_2) \in M^2$, on sait que ${}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) \geq 0$ car la matrice A est symétrique positive, que $F(x_1) = F(x_2) = \sup_{y \in C} F(y)$ par conséquent, pour tout $x = tx_1 + (1-t)x_2$ avec $t \in [0, 1]$ on a

$$\begin{aligned}
 F(x) &= tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + t(1-t) \cdot {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) \\
 &\geq tF(x_1) + (1-t)F(x_2) = F(x_1)
 \end{aligned}$$

car $t(1-t) \cdot {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) \geq 0$. Or $x \in C$ car C est convexe ce qui, en conclusion permet de dire que $F(x) = F(x_1)$ soit $x \in M$ pour tout $t \in [0, 1]$. Finalement M est convexe.

Si M est vide, M est quand même convexe mais l'intérêt semble limité ici.

- B. 1. On peut dire que A est la matrice d'un produit scalaire et utiliser l'équivalence des normes en dimension finie mais il est plus simple ici de diagonaliser A dans une base orthonormale \mathcal{B} et de prendre $k = \min\{\lambda \in {}^t(A)\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
 {}^tXAX &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \\
 &\geq k \sum_{i=1}^n x_i^2 = k {}^tXX.
 \end{aligned}$$

2. Grâce au résultat précédent on a

$$F(x) \leq {}^tPX - k {}^tXX = \langle p, x \rangle - k\|x\|^2.$$

Lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$ alors $F(x) \rightarrow -\infty$ et en conséquence, en prenant $x_0 \in C$ quelconque et en posant $D = \{x \in C \mid F(x) \geq F(x_0)\}$ alors D est borné. D est aussi fermé (image réciproque du fermé $[F(x_0), +\infty[$ par l'application continue F). D est compact donc F est borné sur D et atteint sa borne supérieure.

Conclusion : comme la borne supérieure de F sur D est égale à la borne supérieure de F sur C alors M est non vide.

- C. 1. La principale justification du calcul suivant tient à l'égalité ${}^tX_1AX_2 = {}^tX_2AX_1$ qui est une conséquence de l'hypothèse A symétrique. On utilise

aussi la question III.A.1.

$$\begin{aligned}
F(x) - F(x_2) &= -tF(x_2) + tF(x_1) + (t - t^2) \cdot {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) \\
&= t(-{}^tPX_2 + {}^tX_2AX_2 + {}^tPX_1 - {}^tX_1AX_1 \\
&\quad + t \cdot {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) - t^2 \cdot {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2)) \\
&= -t^2 \cdot {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) \\
&\quad + t \cdot [{}^tP(X_1 - X_2) + {}^tX_2AX_2 - {}^tX_2AX_1 - \underbrace{{}^tX_1AX_2 + {}^tX_2AX_2}_{= {}^tX_2AX_1}] \\
&= -t^2 \cdot {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) + t \cdot {}^t(P - 2AX_2)(X_1 - X_2).
\end{aligned}$$

2. (\Rightarrow) si $x_2 \in M$ alors, pour tout $x_1 \in C$, pour tout $t \in]0, 1]$, on a

$$F(x) - F(x_2) = t[-t \cdot {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) + {}^t(P - 2AX_2)(X_1 - X_2)] \leq 0$$

soit, en simplifiant par $t > 0$, ${}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) + {}^t(P - 2AX_2)(X_1 - X_2) \geq 0$ et en prenant la limite lorsque $t \rightarrow 0$, on obtient ${}^t(P - 2AX_2)(X_1 - X_2) \geq 0$.

(\Leftarrow) implication immédiate, il suffit de prendre $t = 1$. En effet, en posant $Y = X_1$ et $X = X_2$ dans l'égalité du III.C.1, on aura pour tout $y \in C$,

$$F(y) - F(x) = t[-t \cdot {}^t(Y - X)A(Y - X) + {}^t(P - 2AX)(Y - X)] \leq 0.$$

Interprétation : on sait que $P - 2AX = \text{grad } f(x)$ donc on a $\langle \text{grad } f(x), y - x \rangle \leq 0$ ce que l'on peut encore traduire par $\begin{cases} \text{grad } f(x) = 0 & \text{si } x \in \overset{\circ}{C} \\ \langle \text{grad } f(x), y - x \rangle \leq 0 & \text{si } x \in \text{Fr}(C) \end{cases}$.

D. 1. Ici C est fermé borné donc compact car \mathbb{R}^n est un espace de dimension finie. F est continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

On peut prendre comme exemple $F(x) = x_1 - x_1^2$ sur \mathbb{R}^2 avec $C = [0, 1]^2$. $M = \{1/2\} \times [0, 1]$ contient une infinité d'éléments.

2. Immédiat en utilisant la continuité des applications linéaires en dimension finie.

3. a) $f(x) = {}^t(2AU_m - P)X$ est une application continue, f atteint son minimum sur C compact pour un vecteur v_m donc

$$\forall x \in C, {}^t(2AU_m - P)v_m \leq {}^t(2AU_m - P)X.$$

b) On sait que $\|V_m - U_m\| \leq 2R$ et que

$$\begin{aligned}
\|P - 2AU_m\| &\leq \|P\| + 2\|AU_m\| \\
&\leq \|P\| + 2\alpha\|U_m\| \leq \|P\| + 2\alpha R
\end{aligned}$$

donc, grâce à Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
{}^t(P - 2AU_m)(V_m - U_m) &\leq \|P - 2AU_m\| \cdot \|V_m - U_m\| \\
&\leq 2R(\|P\| + 2\alpha R) < r
\end{aligned}$$

et par conséquent $t_m < 1$.

Enfin, grâce à l'inégalité du a) en prenant $X = U_m$, on a $t_m \geq 0$.

Conclusion : $t_m \in [0, 1[$.

c) On écrit que $u_{m+1} = t_m v_m + (1 - t_m)u_m$, u_m et v_m étant dans l'ensemble convexe C alors $u_{m+1} \in C$.

Les suites (u_m) , (v_m) et (t_m) sont en effet définies (de manière non unique) par les relations i), ii) et iii). En effet, par récurrence, si on connaît u_m alors i) permet de "connaître" v_m , ii) permet de calculer t_m et enfin iii) permet

de déterminer u_{m+1} . La connaissance de $u_0 \in C$ permet d'amorcer cette récurrence.

4. On reprend la formule du III.C.1 avec $X_2 = U_m$, $X_1 = V_m$ alors

$$X = t_m V_m + (1 - t_m) U_m = U_m + t_m (V_m - U_m) = U_{m+1}$$

d'où

$$\begin{aligned} F(u_{m+1}) - F(u_m) &= -t_m^2 \cdot {}^t(V_m - U_m)A(V_m - U_m) + t_m \underbrace{{}^t(P - 2AU_m)(V_m - U_m)}_{=rt_m} \\ &= t_m^2 [r - {}^t(V_m - U_m)A(V_m - U_m)]. \end{aligned}$$

Or ${}^t(V_m - U_m)A(V_m - U_m) \leq \|V_m - U_m\| \alpha \|V_m - U_m\| \leq 4\alpha R^2$ et, par conséquent

$$F(u_{m+1}) - F(u_m) \geq t_m^2 (r - 4\alpha R^2) \geq 0$$

donc la suite $(F(u_m))$ est croissante et majorée elle converge.

On a même un peu mieux, en effet $F(u_{m+1}) - F(u_m) \geq t_m^2 (r - 4\alpha R^2) \geq 2\alpha R^2 t_m^2$ donc $t_m \rightarrow 0$.

Par Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite (u_m, v_m) une suite convergente vers (u, v) dans C^2 . En passant à l'inégalité dans la relation i) on obtient

$$\forall x \in C, \quad {}^t(2AU - P)V \leq {}^t(2AU - P)X.$$

Par ailleurs, on a $t_m = \frac{1}{r} \cdot {}^t(P - 2AU_m)(V_m - U_m) \rightarrow 0$ donc

$${}^t(P - 2AU)(V - U) = 0$$

soit, en exploitant les deux derniers résultats

$$\forall x \in C, \quad {}^t(2AU - P)U \leq {}^t(2AU - P)X$$

et la caractérisation du III.C.2 permet de conclure que $u \in M$.