Michel Carré, lycée Joffre, Montpellier

C.C.P. 2004, filière PC, seconde épreuve

• Partie I

1. $\dfrac{|n^{-s}|}{|(n+1)^{-s}|} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^s \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc le rayon de convergence de $\sum n^{-s}z^n$ est égal à 1, d'après la règle de d'Alembert pour les séries entières.

2.1. Ici, $|n^{-s}z^n| = n^{-s}$, donc :
- si $s > 1$, $\sum n^{-s}z^n$ converge absolument, d'après la règle de Riemann.
- si $s \leqslant 0$, $\sum n^{-s}z^n$ diverge grossièrement.

2.2. Pour $0 < s \leqslant 1$, $\sum n^{-s}$ diverge, d'après la règle de Riemann.

2.3. . $S_n = e^{i\theta}\,\dfrac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} = e^{i\theta}\,\dfrac{-2i\,\sin(n\theta/2)\,e^{in\theta/2}}{-2i\,\sin(\theta/2)\,e^{i\theta/2}} = \dfrac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\,e^{i(n+1)\theta/2}$, donc $|S_n| = \dfrac{|\sin(n\theta/2)|}{|\sin(\theta/2)|} \leqslant \dfrac{1}{|\sin(\theta/2)|}$.

. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{-s}z^k = \sum\limits_{k=1}^{n} k^{-s}(S_k - S_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^{-s}S_k - \sum\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)^{-s}S_k = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(k^{-s}-(k+1)^{-s}\right)S_k + n^{-s}S_n$, car $S_0 = 0$.

. Posons $a_k = \left(k^{-s}-(k+1)^{-s}\right)S_k$. D'après ce qui précède, $|a_k| \leqslant \dfrac{k^{-s}-(k+1)^{-s}}{|\sin(\theta/2)|}$.

Par sommation et télescopage, il vient $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k| \leqslant \dfrac{1-(n+1)^{-s}}{|\sin(\theta/2)|} \leqslant \dfrac{1}{|\sin(\theta/2)|}$, qui est une constante.

On en déduit que la série $\sum a_k$ est absolument convergente, donc convergente.

. On a vu plus haut que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{-s}z^k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k + n^{-s}S_n$. On vient de montrer que la somme du membre de droite converge, et le terme $n^{-s}S_n$ tend vers 0 car $s > 0$ et (S_n) est bornée. La série $\sum n^{-s}z^n$ est donc convergente.

3.1. On sait que la fonction somme $t \longmapsto \varphi(t,s+1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)}\,t^n$ est de classe C^1 sur I et que sa dérivée se calcule terme à terme. Comme $\varphi(0,s+1) = 0$, on en déduit, pour tout $x \in I$:

$$\varphi(x,s+1) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}t^{n-1}\right) \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\varphi(t,s)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

3.2. $\varphi(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$ et $\varphi(x,1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ (développements de cours).

4.1. f_n est continue et positive sur $[0,+\infty[$ et $f_n(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(1/t^2)$, du fait de l'exponentielle. Par comparaison, et d'après la règle de Riemann, f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Le changement de variable $u = nt$ donne directement $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = n^{-s}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{s-1}\,\mathrm{d}t = n^{-s}\Gamma(s)$.

4.2. Posons $u_n(t) = z^n f_n(t) = t^{s-1}\,(ze^{-t})^n$. Pour $t > 0$, $|ze^{-t}| < 1$, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et sa somme est la fonction $U\ :\ t \longmapsto t^{s-1}\dfrac{ze^{-t}}{1-ze^{-t}} = \dfrac{z\,t^{s-1}}{e^t - z}$.

Chaque fonction u_n est intégrable sur $]0,+\infty[$, puisque f_n l'est.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = |z|^n\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = |z|^n\,n^{-s}\Gamma(s) \leqslant n^{-s}\Gamma(s)$, terme général d'une série convergente, car $s > 1$.

Par théorème, on en déduit que U est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} U = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n$, ce qui s'écrit :

$$z\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - z}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n\,n^{-s}\Gamma(s), \text{ ou encore } \varphi(z,s) = \frac{z}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t - z}\,\mathrm{d}t.$$

• **Partie II**

1. Démontrons par récurrence sur p la propriété :

$$\mathscr{H}_p \ : \ \zeta \textit{ est } p \textit{ fois dérivable sur }]1,\,+\infty[\textit{ et } \zeta^{(p)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-\ln n)^p\, n^{-s}.$$

. Pour $p=0$, il n'y a rien à démontrer.

. Supposons $\mathscr{H}_p$ et posons $u_n(s) = (-\ln n)^p\, n^{-s}$. u_n est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et $u_n'(s) = (-\ln n)^{p+1}\, n^{-s}$.

Soit $a \in]1,\,+\infty[$. Pour $s \in [a,\,+\infty[$, on a $|u_n'(s)| \leqslant \dfrac{(\ln n)^{p+1}}{n^a} = \dfrac{(\ln n)^{p+1}}{n^{\frac{a-1}{2}}} \cdot \dfrac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}} = \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}\Big)$, avec $\dfrac{a+1}{2} > 1$.

Cela montre que la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a,\,+\infty[$, et *a fortiori* sur tout segment de $]1,\,+\infty[$. Par théorème, il en résulte que $\zeta^{(p)}$ est de classe C^1 sur $]1,\,+\infty[$, donc que ζ est $p+1$ fois dérivable, et que $\zeta^{(p+1)}$ peut se calculer par dérivation terme à terme. On a ainsi obtenu $\mathscr{H}_{p+1}$.

2. En prenant $p=1$, le 1. donne : $\forall s \in]1,\,+\infty[,\ \zeta'(s) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\ln n)\, n^{-s} < 0$. ζ est donc strictement décroissante.

3. Par décroissance de $t \longmapsto t^{-s}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant (k+1)^{-s} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} t^{-s}\ \mathrm{d}t \leqslant k^{-s}$.

Par sommation de $k=1$ à $+\infty$, on obtient $0 \leqslant \zeta(s) - 1 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-s}\ \mathrm{d}t \leqslant \zeta(s)$.

En explicitant l'intégrale, cela se réécrit : $\max\Big(1,\, \dfrac{1}{s-1}\Big) \leqslant \zeta(s) \leqslant 1 + \dfrac{1}{s-1} = \dfrac{s}{s-1}\cdot$

Par encadrement, on en déduit $\boxed{\zeta(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} 1}$ et $(s-1)\,\zeta(s) \xrightarrow[s\to 1]{} 1$, c'est-à-dire $\boxed{\zeta(s) \underset{s\to 1}{\sim} \dfrac{1}{s-1}\cdot}$

• **Partie III**

1.1. . Pour montrer que g est paire, il suffit de montrer que sa restriction à $[-\pi,\,\pi]$ l'est.

Soit donc $x \in]0,\,\pi]$. $-x+2\pi \in [\pi, 2\pi[$, d'où $g(-x) = g(-x+2\pi) = \Big(\dfrac{\pi-(-x+2\pi)}{2}\Big)^2 = \Big(\dfrac{x-\pi}{2}\Big)^2 = g(x)$.

. Par parité, les $b_n(g)$ sont nuls et $a_n(g) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi g(x)\, \cos nx\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^\pi (\pi-x)^2\, \cos nx\ \mathrm{d}x$.

On en tire $\boxed{a_0(g) = \dfrac{\pi^2}{6}}$ et, grâce à deux intégrations par parties, $\boxed{a_n(g) = \dfrac{1}{n^2} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*}$.

. $g(2\pi) = g(0) = \dfrac{\pi^2}{4}$, donc $g(x) = \Big(\dfrac{\pi-x}{2}\Big)^2$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$, donc la restriction de g à $[0, 2\pi]$ est de classe C^1, donc g est continue et de classe C^1 par morceaux. Par théorème, g est somme de sa série de Fourier.

On en conclut que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{g(x) = \dfrac{\pi^2}{12} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}\cdot}$

1.2. . En prenant $x=0$ dans l'égalité précédente, on obtient $\boxed{\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{4} - \dfrac{\pi^2}{12} = \dfrac{\pi^2}{6}\cdot}$

. L'égalité de Parseval pour g s'écrit : $\dfrac{\pi^4}{4\times 6^2} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^4} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi g(x)^2\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{16\pi}\int_0^\pi y^4\ \mathrm{d}y = \dfrac{\pi^4}{80}\cdot$

On en déduit $\boxed{\zeta(4) = 2\Big(\dfrac{\pi^4}{80} - \dfrac{\pi^4}{144}\Big) = \dfrac{\pi^4}{90}\cdot}$

2.1. $\varphi(e^{i\theta}, 2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{in\theta}}{n^2}$, donc $R_\varphi(\theta) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos n\theta}{n^2} = g(\theta) - \dfrac{\pi^2}{12}\cdot$

2.2. D'après **I.**4.2, $\varphi(e^{i\theta}, 2) = e^{i\theta}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t}{e^t - e^{i\theta}}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \dfrac{t\, e^{i\theta}(e^t - e^{-i\theta})}{e^{2t} - 2\cos\theta\, e^t + 1}\ \mathrm{d}t.$

En prenant la partie réelle et en appliquant 2.1, il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t\,(\cos\theta\, e^t - 1)}{e^{2t} - 2\cos\theta\, e^t + 1}\ \mathrm{d}t = R_\varphi(\theta) = g(\theta) - \dfrac{\pi^2}{12}\cdot$

2.3. En prenant $\theta = 0$, puis $\theta = \pi$ dans 2.2, et en simplifiant dans l'intégrale par $e^t - 1$ ou par $e^t + 1$, on obtient :

$$I_1 = g(0) - \frac{\pi^2}{12} \text{ et } -I_2 = g(\pi) - \frac{\pi^2}{12}, \text{ soit } \boxed{I_1 = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } I_2 = \frac{\pi^2}{12}\cdot}$$

On remarque ensuite que $\dfrac{1}{\operatorname{sh} t} = \dfrac{2\,e^t}{e^{2t} - 1} = \dfrac{(e^t + 1) + (e^t - 1)}{(e^t + 1)(e^t - 1)} = \dfrac{1}{e^t - 1} + \dfrac{1}{e^t + 1}$, donc $\boxed{I_3 = I_1 + I_2 = \frac{\pi^2}{4}\cdot}$

3.1. **I.**4.2. donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^{s+1}} = \varphi(e^{i\theta}, s+1) = \frac{e^{i\theta}}{\Gamma(s+1)} \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{e^t - e^{i\theta}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^{+\infty} \frac{t^s\,e^{i\theta}(e^t - e^{-i\theta})}{e^{2t} - 2\cos\theta\,e^t + 1}\,\mathrm{d}t.$

Il suffit alors de séparer la partie réelle et la partie imaginaire pour obtenir les deux égalités demandées.

3.2. . On procède comme au 2.3. En prenant $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ dans la première des égalités du 3.1, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^s}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{s+1}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{e^t + 1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{s+1}}\cdot$$

Comme on l'a vu au 2.3, $\dfrac{1}{\operatorname{sh} t} = \dfrac{1}{e^t - 1} + \dfrac{1}{e^t + 1}\cdot$ En ajoutant les deux égalités ci-dessus, il ne reste dans la somme que les termes d'indice impair, et on obtient $\boxed{J(s) = 2\,\Gamma(s+1)\,S_1(s).}$

. En prenant maintenant $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans la seconde égalité du 3.1 et en remarquant que $\dfrac{e^t}{e^{2t} + 1} = \dfrac{1}{2\operatorname{ch} t}$, on obtient $\displaystyle\frac{I(s)}{2} = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^{s+1}} = \Gamma(s+1) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{s+1}}$, soit $\boxed{I(s) = 2\,\Gamma(s+1)\,S_2(s).}$
