

Polynômes unitaires de norme minimale

Première partie

1. a) Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $Q_j = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} (X - x_k)$. Q_j est un polynôme unitaire de degré $n - 1$. On peut écrire $P = (X - x_j)Q_j$ avec $Q_j(x_j) \neq 0$, d'où $P' = Q_j + (X - x_j)Q'_j$ et $P'(x_j) = Q_j(x_j)$. On a ainsi $P_j = \frac{Q_j}{Q_j(x_j)}$.

P_j est un polynôme de degré $n - 1$.

b) Comme on a $Q_j(x_k) = 0$ pour $k \neq j$, on voit que :

$\forall (j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, P_j(x_k) = \delta_{j,k}$ (symbole de Kronecker).

On peut alors calculer :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_F(x_k) = \sum_{j=1}^n F(x_k) \delta_{j,k} = F(x_k).$$

c) On remarque que $\sum_{j=1}^n P_j$ prend la valeur 1 en chacun des points x_k , $k = 1 \dots n$. Le polynôme $1 - \sum_{j=1}^n P_j$ est de degré au plus $n - 1$ et possède au moins n racines distinctes, il est donc nul. Ainsi :

$$\sum_{j=1}^n P_j = 1.$$

d) Les polynômes P_j , $1 \leq j \leq n$, sont dans $\mathcal{E}_{n-1}$, qui est de dimension n , et sont en nombre n . Montrons qu'ils constituent une famille libre. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des scalaires tels que $\sum_{j=1}^n \lambda_j P_j = 0$. On aura alors

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j(x_k) = 0$. Or $\sum_{j=1}^n \lambda_j P_j(x_k) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{j,k} = \lambda_k$. On a donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = 0$. Il en résulte que :

la famille $P_1, \dots, P_n$ est une base de $\mathcal{E}_{n-1}$.

2. La formule $\forall (j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, P_j(x_k) = \delta_{j,k}$ s'écrit maintenant

$$\forall (j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \delta_{j,k} = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,j} x_k^i = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i+1,j} V_{k,i+1} = \sum_{\ell=1}^n B_{\ell,j} V_{k,\ell} = (VB)_{k,j} \quad \text{soit} \quad VB = I_n.$$

Ceci suffit à prouver que :

$$\boxed{V \text{ est inversible et } V^{-1} = B.}$$

3. a) Le polynôme Q_j (notation introduite en **1. a)**) est unitaire, et $P'(x_j) = Q_j(x_j)$. Comme $P_j = \frac{Q_j}{Q_j(x_j)}$ on voit que le coefficient dominant de P_j est :

$$\boxed{b_{n-1,j} = \frac{1}{P'(x_j)}.$$

On peut alors écrire $\sum_{k=1}^n \frac{(x_k)^j}{P'(x_k)} = \sum_{k=1}^n b_{n-1,k} (x_k)^j = \sum_{k=1}^n B_{n,k} V_{k,j+1} = (BV)_{n,j+1}$. On en déduit :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{(x_k)^j}{P'(x_k)} = \delta_{n,j+1}.$$

Remarque : la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{X^j}{P}$ aurait permis d'obtenir le même résultat.

b) On peut alors calculer :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(X - x_k)^{n-1}}{P'(x_k)} &= \sum_{k=1}^n \frac{\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_{n-1}^j (x_k)^j X^{n-1-j}}{P'(x_k)} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_{n-1}^j \left(\sum_{k=1}^n \frac{(x_k)^j}{P'(x_k)} \right) X^{n-1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_{n-1}^j \delta_{n,j+1} X^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_{n-1}^j \delta_{n-1,j} X^{n-1-j} \\ &= (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{(X - x_k)^{n-1}}{P'(x_k)} \text{ est un polynôme constant égal à } (-1)^{n-1}.$$

Deuxième partie

4. a) Les applications $Q \mapsto N(Q)$ et $Q \mapsto \|Q\|_K$ sont définies sur $\mathcal{E}_d$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Soit $Q \in \mathcal{E}_d$ défini par $Q = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On voit que $\lambda Q = \sum_{i=0}^d \lambda a_i X^i$ donc

$$N(\lambda Q) = \sup_{0 \leq i \leq d} |\lambda a_i| = |\lambda| \sup_{0 \leq i \leq d} |a_i| = |\lambda| N(Q).$$

De même

$$\|\lambda Q\|_K = \sup_{z \in K} |\lambda Q(z)| = |\lambda| \sup_{z \in K} |Q(z)| = |\lambda| \|Q\|_K.$$

Soient $Q = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ et $R = \sum_{i=0}^d b_i X^i$. On a $Q + R = \sum_{i=0}^d (a_i + b_i) X^i$ donc

$$N(Q + R) = \sup_{0 \leq i \leq d} |a_i + b_i| \leq \sup_{0 \leq i \leq d} |a_i| + \sup_{0 \leq i \leq d} |b_i| = N(Q) + N(R).$$

De même

$$\|Q + R\|_K = \sup_{z \in K} |Q(z) + R(z)| \leq \sup_{z \in K} |Q(z)| + \sup_{z \in K} |R(z)| = \|Q\|_K + \|R\|_K.$$

Enfin soit $Q = \sum_{i=0}^d a_i X^i$. Si $N(Q) = 0$, tous les coefficients a_i , $0 \leq i \leq d$ sont nuls et donc $Q = 0$.

De même si $\|Q\|_K = 0$, Q admet tous les points de K comme racines. Comme il y en a au moins $d + 1$ et que le degré de Q est au plus égal à d ceci entraîne encore $Q = 0$.

$$Q \mapsto N(Q) \text{ et } Q \mapsto \|Q\|_K \text{ sont des normes sur } \mathcal{E}_d.$$

Comme $\mathcal{E}_d$ est de dimensions finie, toutes les normes sur $\mathcal{E}_d$ sont équivalentes. En particulier :

$$Q \mapsto N(Q) \text{ et } Q \mapsto \|Q\|_K \text{ sont des normes équivalentes.}$$

b) La fonction $Q \mapsto \|Q\|_K$ est évidemment continue sur l'espace normé $(\mathcal{E}_d, \|\cdot\|_K)$ puisqu'elle y est lipschitzienne de rapport 1. En effet on déduit de l'inégalité triangulaire que $|\|Q\|_K - \|R\|_K| \leq \|Q - R\|_K$.

5. a) Soit $Q = \sum_{i=0}^d a_i X^i$. On peut écrire

$$\forall z \in K, |Q(z)| = \left| \sum_{i=0}^d a_i z^i \right| \leq \sum_{i=0}^d |a_i| |z|^i \leq \sum_{i=0}^d \sup_{0 \leq i \leq d} |a_i| \rho^i = N(Q) \sum_{i=0}^d \rho^i.$$

On en déduit que :

$$\sup_{\substack{Q \in \mathcal{E}_d \\ Q \neq 0}} \frac{\|Q\|_K}{N(Q)} \leq \sum_{i=0}^d \rho^i.$$

b) Soit toujours $Q = \sum_{i=0}^d a_i X^i$. Notant (comme en **2.**) :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^d \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{d+1} & \cdots & x_{d+1}^d \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{0,1} & b_{0,2} & \cdots & b_{0,d+1} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,d+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d,1} & b_{d,2} & \cdots & b_{d,d+1} \end{pmatrix}$$

on a $B = V^{-1}$. Pour tout $j \in \llbracket 1, d+1 \rrbracket$ on a $Q(x_j) = \sum_{i=0}^d a_i x_j^i$ ce qui peut se résumer à la formule matricielle :

$$\begin{pmatrix} Q(x_1) \\ Q(x_2) \\ \vdots \\ Q(x_{d+1}) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} Q(x_1) \\ Q(x_2) \\ \vdots \\ Q(x_{d+1}) \end{pmatrix}$$

soit pour tout entier $\ell \in \llbracket 0, d \rrbracket$: $a_\ell = \sum_{k=1}^{d+1} b_{\ell-1,k} Q(x_k)$. On en tire

$$\forall \ell \in \llbracket 0, d \rrbracket, |a_\ell| \leq \sum_{k=1}^{d+1} |b_{\ell-1,k}| |Q(x_k)| \leq (d+1)\beta \|Q\|_K.$$

On a donc bien prouvé que :

$$\sup_{\substack{Q \in \mathcal{E}_d \\ Q \neq 0}} \frac{N(Q)}{\|Q\|_K} \leq \beta(d+1).$$

Troisième partie

6. a) Le polynôme $D = X^d$ est élément de $\mathcal{U}_d$ et $\forall z \in K$, $|D(z)| = |z|^d \leq \rho^d$ donc $\|D\|_K \leq \rho^d$. On en déduit que $\inf_{Q \in \mathcal{U}_d} \|Q\|_K \leq \rho^d$. Comme d'autre part toute norme est positive, on a bien :

$$0 \leq m \leq \rho^d.$$

b) On peut décomposer $\underbrace{\left\{ \|Q\|_K \mid Q \in \mathcal{U}_d \right\}}_{\mathcal{A}} = \underbrace{\left\{ \|Q\|_K \mid \begin{array}{l} Q \in \mathcal{U}_d \\ \|Q\|_K \leq \rho^d \end{array} \right\}}_{\mathcal{B}} \cup \underbrace{\left\{ \|Q\|_K \mid \begin{array}{l} Q \in \mathcal{U}_d \\ \|Q\|_K > \rho^d \end{array} \right\}}_{\mathcal{C}}.$

Par définition $m = \inf \mathcal{A}$. On veut prouver $\inf \mathcal{A} = \inf \mathcal{B}$.

- ◇ C'est évident si $\mathcal{C}$ est vide.
- ◇ Sinon $\inf \mathcal{B} \leq \rho^d \leq \inf \mathcal{C} \Rightarrow \inf \mathcal{A} = \inf (\inf \mathcal{B}, \inf \mathcal{C}) = \inf \mathcal{B}$.

$$\inf_{\substack{Q \in \mathcal{U}_d \\ \|Q\|_K \leq \rho^d}} \|Q\|_K = m.$$

c) L'application : $\mathcal{E}_d \rightarrow \mathbb{C}$ est 1-lipschitzienne si l'on munit $\mathcal{E}_d$ de la norme N . Elle est donc

$$\sum_{i=0}^d a_i X^i \mapsto a_d$$

continue, et $\mathcal{U}_d$, image réciproque du fermé $\{1\}$, est fermé. Vue l'équivalence des normes c'est aussi un fermé de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}_d, \|\cdot\|_K)$.

L'ensemble $\{Q \mid \|Q\|_K \leq \rho^d\}$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon ρ^d de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}_d, \|\cdot\|_K)$. C'est donc un compact. L'intersection d'un fermé et d'un compact est un compact. Sur ce compact la fonction continue et à valeurs réelles $Q \mapsto \|Q\|_K$ atteint sa borne inférieure m . Donc :

$$\exists Q_0 \in \mathcal{U}_d \text{ tel que } \|Q_0\|_K = m.$$

Quatrième partie

7. Soit $|c_k| = \alpha \neq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $c_k = \alpha e^{i\theta}$. Choisissons par exemple $z = z_0 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}} e^{-\frac{i\theta}{k}}$. On calcule $Q(z) = 1 + \alpha e^{i\theta} \frac{1}{\alpha} e^{-i\theta} = 2$ et on a bien :

$$2 = |Q(z)| > |Q(z_0)| = 1.$$

8. a) Le polynôme $Q - 1$ est non nul et il a la racine z_0 . Soit k l'ordre de cette racine, on peut écrire $Q - 1 = (X - z_0)^k S$ où S est un polynôme non nul en z_0 . Posons $c_k = S(z_0)$, le polynôme $\frac{S}{c_k} - 1$ a la racine z_0 et peut donc s'écrire à son tour $\frac{S}{c_k} - 1 = (X - z_0)R$. On a $Q - 1 = c_k(X - z_0)^k(1 + (X - z_0)R)$ soit :

$$Q = 1 + c_k(X - z_0)^k + c_k(X - z_0)^{k+1}R \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } c_k \in \mathbb{C}^*.$$

b) D'après la relation précédente il suffit de trouver un complexe z tel que $|z - z_0| = r$ et que $c_k(z - z_0)^k$ soit un réel positif. Si l'on note $c_k = \alpha e^{i\theta}$ comme en **7.** avec $\alpha > 0$ on voit que $z = z_0 + r e^{-\frac{i\theta}{k}}$ convient. En effet on a alors

$$Q(z) = 1 + \alpha e^{i\theta} \left(r e^{-\frac{i\theta}{k}} \right)^k + \alpha e^{i\theta} \left(r e^{-\frac{i\theta}{k}} \right)^k (z - z_0)R(z) = 1 + \alpha r^k + \alpha r^k (z - z_0)R(z)$$

qui est bien égal à $1 + |c_k||z - z_0|^k + |c_k||z - z_0|^k(z - z_0)R(z)$.

c) Si R est le polynôme nul (ce qui n'est pas interdit par l'énoncé), le z trouvé en **b)** convient puisque $|z - z_0| = r$ et $|Q(z)| = 1 + |c_k||z - z_0|^k > 1 = |Q(z_0)|$. Sinon la fonction continue $z \mapsto |R(z)|$ étant bornée sur le compact $\mathcal{B}_f(z_0, r)$ on peut poser $M = \sup_{|z - z_0| \leq r} |R(z)|$ et $r' = \min \left(r, \frac{1}{2M} \right)$. Appliquons alors **b)** en faisant jouer le rôle de r par r' . On trouve ainsi un z tel que $z - z_0 = r'$ et $Q(z) = 1 + a + a(z - z_0)R(z)$ avec $a = |c_k||z - z_0|^k$. On a alors $|Q(z)| \geq 1 + a - a|(z - z_0)R(z)|$.

Comme par construction $|(z - z_0)R(z)| = r'|R(z)| \leq \frac{1}{2M}M = \frac{1}{2}$ on a bien :

$$|Q(z)| \geq 1 + \frac{a}{2} > 1 = |Q(z_0)| \text{ avec } |z - z_0| = r' \leq r.$$

9. a) Soit $Q \in \mathcal{E}_d$ non constant, $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Distinguons deux cas :

◇ $Q(z_0) = 0$. Comme Q n'est pas nul la fonction polynôme associée n'est pas nulle sur l'ensemble infini $\mathcal{B}_f(z_0, r)$. On peut donc trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| \leq r$ et $|Q(z)| > |Q(z_0)|$.

◇ $Q(z_0) \neq 0$. Posons $T = \frac{Q}{Q(z_0)}$ et appliquons à T le résultat de **8. c)** : on trouve un z vérifiant $|z - z_0| \leq r$ et $|T(z)| > |T(z_0)|$ soit $\frac{|Q(z)|}{|Q(z_0)|} > \frac{|Q(z_0)|}{|Q(z_0)|}$ et donc $|Q(z)| > |Q(z_0)|$.

$$\forall Q \in \mathcal{E}_d \text{ non constant, } \forall z_0 \in \mathbb{C}, \forall r > 0, \exists z \in \mathcal{B}_f(z_0, r) \text{ tel que } |Q(z)| > |Q(z_0)|.$$

b) Remarquons tout d'abord que l'inégalité $\sup_{|z| \leq 1} |Q(z)| \geq \sup_{|z|=1} |Q(z)|$ découle directement du fait que le cercle unité est inclus dans la boule unité fermée. Il reste à montrer $\sup_{|z| \leq 1} |Q(z)| \leq \sup_{|z|=1} |Q(z)|$.

◇ Si le polynôme Q est constant le résultat est trivial.

◇ Supposons Q non constant. La fonction réelle continue $z \mapsto |Q(z)|$ atteint son maximum sur la boule unité fermée en un point z_0 . Il nous suffit de montrer que $|z_0| = 1$. Supposons par l'absurde que $|z_0| < 1$ et appliquons le **a)** avec Q , z_0 et $r = 1 - |z_0|$. On trouve un z pour lequel $|Q(z)| > |Q(z_0)|$ et $|z - z_0| \leq 1 - |z_0|$. Mais alors $|z| = |z_0 + (z - z_0)| \leq |z_0| + |z - z_0| \leq 1$ ce qui est incompatible avec $|Q(z)| > |Q(z_0)|$.

$$\forall Q \in \mathcal{E}_d, \sup_{|z| \leq 1} |Q(z)| = \sup_{|z|=1} |Q(z)|.$$

c) Au polynôme $Q = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ associons le polynôme $\tilde{Q} \in \mathcal{E}_d$ défini par $\tilde{Q} = \sum_{i=0}^d a_{d-i} X^i = \sum_{i=0}^d a_i X^{d-i}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a $\frac{Q(z)}{z^d} = \tilde{Q} \left(\frac{1}{z} \right)$.

Quand z décrit le cercle unité il en est de même de $\frac{1}{z}$, on voit donc que $\sup_{|z|=1} |Q(z)| = \sup_{|z|=1} |\tilde{Q}(z)|$. Pour tout z tel que $|z| \geq 1$ on a $\left|\frac{1}{z}\right| \leq 1$ et $\left|\frac{Q(z)}{z^d}\right| = \left|\tilde{Q}\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq \sup_{|z'| \leq 1} |\tilde{Q}(z')| = \sup_{|z'|=1} |\tilde{Q}(z')| = \sup_{|z|=1} |Q(z)|$. On a ainsi prouvé que $\sup_{|z| \geq 1} \left|\frac{Q(z)}{z^d}\right| \leq \sup_{|z|=1} |Q(z)|$. L'inégalité inverse est triviale puisque lorsque $|z| = 1$ on a $|z| \geq 1$ et $|Q(z)| = \left|\frac{Q(z)}{z^d}\right|$.

$$\boxed{\sup_{|z| \geq 1} \left|\frac{Q(z)}{z^d}\right| = \sup_{|z|=1} |Q(z)|.}$$

d) On voit que $\|Q_0\|_K = 1$. Pour prouver l'égalité demandée il suffit de montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathcal{U}_d$ on a $\|Q\|_K \geq 1$, soit avec le choix fait pour K dans cette question :

$\forall Q \in \mathcal{U}_d$, $\sup_{|z| \leq 1} |Q(z)| \geq 1$ ou encore avec **c)** : $\forall Q \in \mathcal{U}_d$, $\sup_{|z| \geq 1} \left|\frac{Q(z)}{z^d}\right| \geq 1$. Ce dernier résultat découle du fait

que, Q étant unitaire de degré d , $Q(x) \sim x^d$ et donc pour z réel positif : $\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{Q(z)}{z^d} = 1$.

Lorsque $K = \{z \mid |z| \leq 1\}$ la borne m vaut 1 et elle est atteinte pour $Q_0 = X^d$.

Cinquième partie

10. La relation $|z_0 + z_1| = |z_0| + |z_1|$ élevée au carré devient $(z_0 + z_1)(\overline{z_0} + \overline{z_1}) = z_0\overline{z_0} + z_1\overline{z_1} + 2|z_0z_1|$ soit après simplification : $\Re(z_0\overline{z_1}) = |z_0z_1|$. Les seuls complexes ayant leur partie réelle égale à leur module sont les réels positifs, donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_0\overline{z_1} = \alpha$. On en déduit puisque $z_1 \neq 0$ que $z_0 = \lambda z_1$ avec $\lambda = \frac{\alpha}{|z_1|^2}$. On a évidemment $\lambda \geq 0$, et la non nullité de z_0 garantit alors $\lambda > 0$.

11. a) On remarquera que la formule $Q_t = tQ_1 + (1-t)Q_0$ est encore valable pour $t \in \{0, 1\}$.

On peut écrire $\forall z \in K$, $|Q_t(z)| = |tQ_1(z) + (1-t)Q_0(z)| \leq |t||Q_1(z)| + |1-t||Q_0(z)| \leq m$ puisque $t \geq 0$, $1-t \geq 0$, $\|Q_0\|_K = \|Q_1\|_K = m$. On a donc $\|Q_t\|_K \leq m$. D'autre part le polynôme Q_t est dans $\mathcal{U}_d$ puisque son coefficient dominant est $t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1$ et donc $\|Q_t\|_K \geq m$. Finalement :

$$\boxed{\forall t \in [0, 1], \|Q_t\|_K = m.}$$

b) On a $m = |Q_t(z)| = |tQ_1(z) + (1-t)Q_0(z)| \leq t|Q_1(z)| + (1-t)|Q_0(z)|$ et $\begin{cases} |Q_0(z)| \leq \|Q_0\|_K = m \\ |Q_1(z)| \leq \|Q_1\|_K = m. \end{cases}$

Ces deux inégalités sont donc des égalités, et en outre $|tQ_1(z) + (1-t)Q_0(z)| = t|Q_1(z)| + (1-t)|Q_0(z)|$. D'après **10.** il existe alors $\lambda_z > 0$ tel que $Q_1(z) = \frac{\lambda_z(1-t)}{t}Q_0(z)$ autrement dit il existe un réel $\mu_z > 0$ tel que $Q_1(z) = \mu_z Q_0(z)$. L'égalité des modules impose alors $\mu_z = 1$ et finalement $\boxed{Q_0(z) = Q_1(z)}$.

c) D'après la question précédente tout point de K où $|Q_t|$ atteint son maximum est une racine de $Q_0 - Q_1$. Comme les polynômes Q_0 et Q_1 sont unitaires de degré d , leur différence est de degré au plus $d-1$ et ne peut donc avoir plus de $d-1$ racines, donc :

$$\boxed{\forall t \in]0, 1[, \text{Card}(\mathcal{M}(Q_t)) < d.}$$

12. a) Soit $n \leq d$ le cardinal de $\mathcal{M}(Q)$ et $x_1, \dots, x_n$ ses éléments. Reprenant les notations de la première partie on pose $L = L_Q = \sum_{j=1}^n Q(x_j)P_j$. D'après **I 1. b)** on a bien $L \in \mathcal{E}_{n-1} \subset \mathcal{E}_{d-1}$ et quel que soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L(x_k) = Q(x_k)$.

On a ainsi défini $L \in \mathcal{E}_{d-1}$ tel que $\forall z \in \mathcal{M}(Q)$, $L(z) = Q(z)$.

b) Comme L est de degré au plus $d-1$ le polynôme Q_p est encore dans $\mathcal{U}_d$ donc $\|Q_p\|_K \geq m = \|Q\|_K$. La compacité de K garantit alors l'existence d'un point $z_p \in K$ tel que $|Q_p(z_p)| = \|Q_p\|_K$. Ainsi :

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists z_p \in K$ tel que $|Q_p(z_p)| \geq \|Q\|_K$

c) On a $|Q_{n_p}(z_{n_p})| = \left| Q(z_{n_p}) - \frac{1}{n_p} L(z_{n_p}) \right|$. La fonction L est bornée sur K et la fonction Q est continue. Lorsque p tend vers $+\infty$, n_p aussi ; z_{n_p} tend vers ℓ et le second membre de cette égalité tend vers $|Q(\ell)|$. Comme le premier reste minoré par $\|Q\|_K$ on en déduit $|Q(\ell)| \geq \|Q\|_K$ et donc par définition de la borne supérieure :

$|Q(\ell)| = \|Q\|_K$.

Cela peut encore se dire $\ell \in \mathcal{M}(Q)$ et donc par construction de L :

$L(\ell) = Q(\ell)$.

d) Comme $|Q(\ell)| = m$, $Q(\ell)$ est non nul et on peut poser $\varepsilon_p = \frac{Q(z_{n_p})}{Q(\ell)} - 1$. On a $Q(z_{n_p}) = Q(\ell)(1 + \varepsilon_p)$ et $Q(\ell) = \sup_{z \in K} |Q(z)|$ garantit alors $|1 + \varepsilon_p| \leq 1$. D'autre part $\lim_{p \rightarrow +\infty} Q(z_{n_p}) = Q(\ell)$ montre que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \varepsilon_p = 0$. De même pour p assez grand $Q(z_{n_p})$ est non nul (puisque sa limite l'est) et on peut donc poser $\varepsilon'_p = \frac{L(z_{n_p})}{Q(z_{n_p})} - 1$. On a alors $L(z_{n_p}) = Q(z_{n_p})(1 + \varepsilon'_p) = Q(\ell)(1 + \varepsilon_p)(1 + \varepsilon'_p)$. Puisque $\lim_{p \rightarrow +\infty} L(z_{n_p}) = L(\ell) = Q(\ell) = \lim_{p \rightarrow +\infty} Q(z_{n_p})$ on a aussi $\lim_{p \rightarrow +\infty} \varepsilon'_p = 0$. On peut alors écrire

$$Q_{n_p}(z_{n_p}) = Q(z_{n_p}) - \frac{1}{n_p} L(z_{n_p}) = Q(\ell)(1 + \varepsilon_p) \left(1 - \frac{(1 + \varepsilon'_p)}{n_p} \right).$$

et par conséquent

$$|Q_{n_p}(z_{n_p})| \leq |Q(\ell)| |1 + \varepsilon_p| \left| 1 - \frac{(1 + \varepsilon'_p)}{n_p} \right| \leq |Q(\ell)| |1 + \varepsilon_p| \left(\left(1 - \frac{1}{n_p} \right) + \frac{|\varepsilon'_p|}{n_p} \right).$$

Comme $|1 + \varepsilon_p| \leq 1$ et que pour p assez grand $|\varepsilon'_p| < 1$, on en déduit que :

pour p assez grand $|Q_{n_p}(z_{n_p})| < \|Q\|_K$.

Ce résultat est en contradiction avec la condition $\forall p \in \mathbb{N}^*, |Q_p(z_p)| \geq \|Q\|_K$ qui a présidé au choix des z_p ; l'hypothèse « $\exists Q \in \mathcal{U}_d$ tel que $\text{Card}(\mathcal{M}(Q)) \leq d$ » faite au début de la question **12.** est donc fausse.

13. D'après la question **11.**, s'il existe deux polynômes Q_0 et Q_1 de $\mathcal{U}_d$ tels que $\|Q_0\|_K = m$ et $\|Q_1\|_K = m$, le polynôme $T = \frac{Q_0 + Q_1}{2}$ (par exemple) est encore un polynôme de $\mathcal{U}_d$ vérifiant $\|T\|_K = m$ et $\text{Card}(\mathcal{M}(T)) < d$. On vient de voir que c'est impossible, et donc :

il y a unicité du polynôme Q_0 de $\mathcal{U}_d$ tel que $\|Q_0\|_K = m$.