Concours Commun Mines-Ponts 2005 - MP - Maths 2 (4H)

2005

1. Si $M = S + A$ avec $M \in M_n(\mathbb{R}), S \in S_n(\mathbb{R}), A \in A_n(\mathbb{R})$, il faut que $S = \frac{M+M^t}{2}$ et $A = \frac{M-M^t}{2}$, qui conviennent réciproquement.
2. On calcule $\operatorname{tr}(ME_{(i,j)}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ME_{(i,j)})_{k,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}(M)_{k,h}(E_{(i,j)})_{h,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}(M)_{k,h}\delta_{i,h}\delta_{j,k} = (M)_{j,i}$.
3. Pour $i \neq j$, on a $\operatorname{tr}(M(E_{(i,j)} - E_{(j,i)})) = 0$, donc $(M)_{j,i} = (M)_{i,j}$: ainsi $M \in S_n(\mathbb{R})$.
4. Par linéarité et continuité, $(\mathrm{e}^T)^t = \mathrm{e}^{T^t} = \mathrm{e}^{-T}$; or T et $-T$ commutent, donc $\mathrm{e}^T(\mathrm{e}^T)^t = \mathrm{e}^0 = I_n$, enfin $\mathrm{e}^T \in O_n(\mathbb{R})$.
5. On développe : $\mathrm{e}^{sM} = I_n + sM + \displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{s^pM^p}{p!} = I_n + sM + s^2\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{s^{p-2}M^p}{p!}$.
   Notant $\alpha = \displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{s^{p-2}M^p}{p!}$, on majore : $||\alpha|| \leqslant \displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{|s|^{p-2}||M||^p}{p!}$ (par sous-multiplicativité de la norme matricielle notamment). Le majorant est la somme d'une série entière de la variable s, donc continue et bornée au voisinage de 0 ; donc $\alpha = O(1) \quad \{s \to 0\}$.
   Enfin, $\mathrm{e}^{sM} = I_n + sM + O(s^2) \quad \{s \to 0\}$.
6. On exploite la formule théorique :
   $\det(M - XI_n) = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\prod_{i=1}^{n}(m_{i,\sigma(i)} - X\delta_{i,\sigma(i)})$.
   Chaque terme $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(m_{i,\sigma(i)} - X\delta_{i,\sigma(i)})$ est de la forme $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(M)X^j$, où $\alpha_j(M)$ est une fonction polynomiale des coefficients de M. Il en est donc de même pour la somme : $\det(M - XI_n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(M)X^j$, où $\alpha_j(M)$ est une fonction polynomiale des coefficients de M, donc continue.
7. On peut se sentir incité à utiliser les notations du 6.
   Pour $s \neq 0$, on a $\det(M - \frac{1}{s}I_n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(M)s^{-j}$, puis $\forall s$, $\det(sM - I_n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(M)s^{n-j}$, enfin $\det(sM + I_n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(M)(-1)^js^{n-j}$.
   Or $\det(M - XI_n) = (-1)^nX^n + (-1)^{n-1}\operatorname{tr}MX^{n-1} + \cdots + \det M$, qui révèlent $\alpha_n(M) = (-1)^n$, $\alpha_{n-1}(M) = (-1)^{n-1}\operatorname{tr}M$.
   Alors $\det(I_n+sM) = (-1)^n(-1)^n+(-1)^{n-1}\operatorname{tr}M(-1)^{n-1}s+\displaystyle\sum_{j=0}^{n-2}\alpha_j(M)(-1)^js^{n-j}$,

et le troisième terme est bien $O(s^2) \quad \{s \to 0\}$.

Notons $A(s) = I_n + sM$. Dire que $P = O(s^2)$, c'est dire que chaque coefficient $(P)_{ij}$ est $O(s^2)$. Alors $\det(I_n + sM + O(s^2)) = \det(A(s) + O(s^2)) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} (a_{i,\sigma(i)}(s) + (P)_{i,\sigma(i)}(s))$. La théorie des développements limités assure que chaque $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (a_{i,\sigma(i)}(s) + (P)_{i,\sigma(i)}(s))$ est $(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}) + O(s^2)$. Au total, en sommant, $\det(I_n + sM + O(s^2)) = 1 + s \operatorname{tr} M + O(s^2) \quad \{s \to 0\}$.

8. On trigonalise M sur $\mathbb{C}$: soit $M = PTP^{-1}$, avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Sur la diagonale, par choix de P, on peut décider de faire apparaître dans l'ordre :
   - les valeurs propres strictement positives : $\lambda_1^2, \cdots, \lambda_k^2$ (avec $0 \leqslant k < n$) ;
   - les valeurs propres strictement négatives : $-\mu_1^2, \cdots, -\mu_h^2$ (avec $0 \leqslant h < n$) ;
   - les valeurs propres nulles : $0, \cdots, 0$ (soit t fois, avec $1 \leqslant t \leqslant n$) ;
   - les valeurs propres complexes conjuguées : $\alpha_1 + i\beta_1, \cdots, \alpha_p + i\beta_p$, $\alpha_1 - i\beta_1, \cdots, \alpha_p - i\beta_p$, avec $0 \leqslant p$ et par exemple chaque $\beta_j > 0$.

   Posons alors $D = \operatorname{Diag}(1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1, (-1)^h, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$, où il y a k fois le 1, h fois le -1, $t-1$ fois le 1, et $2p$ fois le 0, puis $N_0 = PD_0P^{-1}$.
   Alors $M + sN_0 = P(T + sD_0)P^{-1}$, puis $\det(M + sN_0) = \det(T + sD_0)$ $= (\lambda_1^2 + s) \dots (\lambda_k^2 + s)(-1)^h(\mu_1^2 + s) \dots (\mu_h^2 + s)(-1)^h s^t(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \dots (\alpha_p^2 + \beta_p^2)$.
   On a bien, pour tout $s > 0$, $\det(M + sN_0) > 0$.

9. Si M est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$, bien sûr ...), on peut reprendre la construction ci-dessus, avec P réelle, T diagonale et $p = 0$. Alors $N_0 = PD_0P^{-1}$ est réelle et diagonalisable (sur $\mathbb{R}$). Si M est symétrique, on peut choisir de plus $P \in O_n(\mathbb{R})$: alors $N_0 = PD_0P^{-1}$ est symétrique réelle.

10. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$, telle que $A = PDP^{-1}$, $B = P\Delta P^{-1}$, où D et Δ sont diagonales (résultat admis P1). On peut décider de faire apparaître les valeurs propres de A dans l'ordre $a_1, \cdots, a_n$; celles de B apparaissent dans un certain ordre $b_{\sigma(1)}, \cdots, b_{\sigma(n)}$, pour un certain $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On a alors $\det(A + B) = \det(D + \Delta) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)})$.

11. $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), MM^t = I_n\}$ apparaît comme fermé (image réciproque d'un fermé par une application continue), et comme borné (si M est orthogonale, on a pour tout coefficient $|(M)_{i,j}| \leqslant 1$) : il est ainsi compact (caractérisation des compacts dans un espace vectoriel de dimension finie).

12. Prenons $f_M : O_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), U \mapsto UMU^{-1} = UMU^t$. Les applications $U \mapsto UM$ et $U \mapsto MU^t$ sont linéaires donc continues (dimension finie), ainsi f_M est continue. Son image est $O_n(M)$, qui est ainsi compact comme image continue d'un compact.

Alors $\varphi : O_n(M) \to \mathbb{R}, C \mapsto \det(A+C)$ est une application continue, qui atteint donc son maximum sur le compact $O_n(M)$, ce qui traduit l'existence de $B_0 \in O_n(M)$ tel que $\det(A+B_0) = \sup\limits_{C \in O_n(\mathbb{R})} \det(A+C)$.

13. On exploite les DL obtenus plus haut ($\{s \to 0\}$) :
$\mathrm{e}^{sT} = I_n + sT + O(s^2)$; $\mathrm{e}^{-sT} = I_n - sT + O(s^2)$ (c'est (2)) ; $\mathrm{e}^{sT} B_0 \,\mathrm{e}^{-sT} = (I_n+sT+O(s^2))B_0(I_n-sT+O(s^2)) = (B_0+sTB_0+O(s^2))(I_n-sT+O(s^2))$
$= B_0 - sB_0T + sTB_0 + O(s^2)$,
de sorte que $\psi_T(s) = \det(A + B_0 + s(TB_0 - B_0T) + O(s^2))$
$= \det(I_n + s(TB_0 - B_0T)(A+B_0)^{-1} + O(s^2)) \det(A+B_0)$
$= \det(A+B_0).(1 + s\,\mathrm{tr}\left((TB_0 - B_0T)(A+B_0)^{-1}\right) + O(s^2))$ (grâce à (3))
$= \det(A+B_0).\left(1 + s\,\mathrm{tr}\left((TB_0 - B_0T)(A+B_0)^{-1}\right)\right) + O(s^2)$ aussi bien.

14. Comme T, la matrice sT est antisymétrique, et e^{sT} est orthogonale (par 4.), donc $\mathrm{e}^{sT} B_0 \,\mathrm{e}^{-sT} \in O_n(B_0) = O_n(B)$.
Donc $\psi_T(s) = \det(A + \mathrm{e}^{sT} B_0 \,\mathrm{e}^{-sT}) \leqslant \det(A+B_0) = \psi_T(0)$.

15. Alors, $s \mapsto \psi_T(s)$ admet un maximum local en 0. Sa dérivée est donc nulle, ce qui au vu du résultat de 13. entraîne la nullité du terme :
$\mathrm{tr}\left((TB_0 - B_0T)(A+B_0)^{-1}\right)$.
On obtient ainsi $\mathrm{tr}\left((TB_0)(A+B_0)^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left((B_0T)(A+B_0)^{-1}\right)$
$= \mathrm{tr}\left(T(A+B_0)^{-1}B_0\right)$, c'est (5).

16. Pour la matrice $G = B_0(A+B_0)^{-1} - (A+B_0)^{-1}B_0$, on a obtenu finalement la relation : $\forall T \in A_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(TG) = 0$. On en tire (question 3.) : $G \in S_n(\mathbb{R})$. Mais $B_0 = U_0 B U_0^{-1}$ (pour un certain $U_0 \in O_n(\mathbb{R})$, et donc $B_0 \in S_n(\mathbb{R})$, c'est aussi le cas de $(A+B_0)$ puis de $(A+B_0)^{-1}$. Alors $G^t = (A+B_0)^{-1}B_0 - B_0(A+B_0)^{-1}$ vaut à la fois G et $-G$, donc $G = 0$.
C'est dire que B_0 commute avec $(A+B_0)^{-1}$; alors, elle commute aussi avec $(A+B_0)$, et finalement avec A.

17. Le spectre de B_0 est celui de B, soit $(b_1, \cdots, b_k)$. Les matrices A et B_0 sont symétriques et commutent ; d'après 10., on a $\det(A+B_0) = \prod\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)})$ pour un certain $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Or $B \in O_n(B)$ (!), donc on a par définition de B_0 l'inégalité $\det(A+B) \leqslant \det(A+B_0)$. Les deux inégalités réunies donnent (1).

18. La matrice $A + B_0$ est symétrique et non inversible : d'après 9., il existe N_0, symétrique réelle, telle que $\forall s > 0, \det(A + B_0 + sN_0) > 0$.
Pour $k \geqslant 1$, posons alors $N_k = B_0 + \dfrac{1}{k} N_0$: c'est là une matrice symétrique, et $A + N_k$ est inversible.
On peut faire jouer à N_k le rôle de B dans les questions précédentes : B_0 sera appelé B_k (il dépend aussi de k) : $B_k \in O_n(N_k)$, et $\det(A+B_k) = \sup\limits_{C \in O_n(N_k)} \det(A+C)$. On a ainsi $\det(A+B_k) \geqslant \det(A+N_k) > 0$. Donc $A + B_k$ est inversible : on a montré qu'alors B_k commute avec A (partie II.1.).

19. On écrit maintenant $B_k = U_k N_k U_k^{-1}$. De la suite (U_k) à valeurs dans le compact $O_n(\mathbb{R})$, on extrait $(U_{\varphi(k)})$ convergente vers $U_\infty \in O_n(\mathbb{R})$. Puisque $(N_k) \to B_0$, on a toujours $(N_{\varphi(k)}) \to B_0$. Alors $(B_{\varphi(k)}) \to U_\infty B_0 U_\infty^{-1} = B_\infty$. On a pour tout k l'égalité $AB_{\varphi(k)} = B_{\varphi(k)}A$, donc à la limite $B_\infty A = AB_\infty$.
Le spectre de B_∞ est celui de B_0 donc de B, soit $(b_1, \cdots, b_n)$, et on a encore $\det(A + B_\infty) = \prod_{k=1}^{n}(a + b_{\sigma(k)})$ pour un certain $\sigma \in \mathfrak{S}_n$; or l'inégalité $\det(A+N_{\varphi(k)}) \leqslant \det(A+B_{\varphi(k)})$ donne à la limite $\det(A+B_\infty) \geqslant \det(A + B_0)$, qui majore encore $\det(A + B)$, c'est l'inégalité voulue.

20. La proposition est claire pour $n = 1$.
Pour $n = 2$, il reste à voir que l'on a $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \leqslant (a_1 + b_2)(a_2 + b_1)$, ce qui revient à $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \geqslant 0$, et c'est vrai.
Supposons la proposition acquise au rang $n - 1$ pour un $n \geqslant 3$.
Cas 1. $\sigma(n) = 1$. Pour $i \in \{1, \cdots, n - 1\}$, on pose $\tau(i) = \sigma(i) - 1 \in \{1, \cdots, n - 1\}$. Alors τ est injective, donc $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$. On pose $c_i = b_{i+1}$. On a chaque $a_i + c_j > 0$; $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_{n-1}$; $c_1 \leqslant \cdots \leqslant c_{n-1}$. L'hypothèse de récurrence donne $\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + c_{\tau(k)}) \leqslant \prod_{k=1}^{n-1}(a_k + c_{n-1-k+1})$, donc $\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b_{\tau(k)+1}) \leqslant \prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b_{n-k+1})$, d'où l'inégalité voulue par produit avec $(a_n + b_1) > 0$.
Cas 2. Avec les notations de l'énoncé, on prend $\tau = (1\ j) \circ \sigma : n \to 1; i \to j; k \to \sigma(k)$ si $k \neq n, k \neq i$.
D'après le cas 1, on sait que $\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\tau(k)}) \leqslant \prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{n-k+1})$.
Or $\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma(k)}) = \prod_{k=1, k\neq i, k\neq n}^{n} (a_k + b_{\tau(k)}).(a_i + b_1)(a_n + b_j)$
$\leqslant \prod_{k=1, k\neq i, k\neq n}^{n} (a_k + b_{\tau(k)}).(a_i + b_j)(a_n + b_1)$ (grâce à $\pi(2)$ pour les nombres $a_i \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_j$), et le majorant vaut en définitive $\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\tau(k)}) \leqslant \prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{n-k+1})$ comme on l'a vu, c'est l'inégalité voulue dans ce cas.