Première partie

1) Je désigne par u l'endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^N$ canoniquement associé à A, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_N)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u, associés à des valeurs propres ordonnées de façon que $|\lambda_1| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_N|$[1].

1.a) Si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i e_i$, on a $\|Ax\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 x_i^2 \leqslant \lambda_1^2 \|x\|^2$. Comme l'égalité est obtenue pour $x = e_1$, on conclut facilement que $\|A\| = |\lambda_1|$.
1.b) La démonstration est analogue, mais cette fois on fait en sorte que $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N$.
1.c) Avec la convention du **1.b**, cela découle immédiatement de la formule valable pour tout x :

$$\lambda_1 \|x\|^2 - (Ax|x) = \sum_{i=1}^{N} (\lambda_1 - \lambda_i) x_i^2$$

Toutefois, on n'oubliera pas d'envisager que λ_1 peut être de multiplicité > 1.

Deuxième partie

2) Comme A est diagonalisable, il suffit de montrer que tous les sous-espaces vectoriels propres de u sont de dimension $\leqslant 1$. Soit alors λ une valeur propre de u ; si $x = {}^t(x_1, \ldots, x_N)$, $Ax = \lambda x$ si, et seulement si,

$$(\mathscr{S}(A)) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,2} x_2 & = & \lambda x_1 \\ a_{2,3} x_3 & = & \lambda x_2 - a_{2,1} x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N-1,N} x_N & = & \lambda x_{N-1} - a_{N-1,N-2} x_{N-2} \\ a_{N,N-1} x_{N-1} & = & \lambda x_N \end{array} \right.$$

Cela *implique* que x appartient à $\mathrm{Vect}(X_\lambda)$, où $X_\lambda = {}^t(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ et où les ξ_i sont définis de proche en proche par $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = \dfrac{\lambda}{a_{1,2}} \xi_1, \ldots, \xi_i = \dfrac{\lambda \xi_{i-1} - a_{i-1,i-2} \xi_{i-2}}{a_{i-1,i}}, \ldots$ La propriété annoncée s'ensuit.

3.a) On obtient $P_2(X) = X^2 - 1$ et $P_3(X) = X^3 - 2X$.
3.b) En développant par rapport à la dernière ligne de $\mathrm{Det}(XI_N - A_N)$, on a tout de suite, pour tout $N \geqslant 3$, $P_N(X) = XP_{N-1}(X) - P_{N-2}(X)$. Cela suggère de poser $P_0(X) = 1$ si l'on veut étendre cette formule au cas $N = 2$.
3.c) On a, pour tout $N \geqslant 2$, $\mathrm{Det} A_N = (-1)^N P_N(0)$ et **3.b** montre que

$$\mathrm{Det} A_N = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } N \text{ est impair} \\ (-1)^{N/2} & \text{si } N \text{ est pair} \end{array} \right.$$

3.d) P_N a la parité de N.
4) Vu les valeurs particulières des $a_{i,j}$, on établit de proche en proche que $x_k = P_{k-1}(\lambda) x_1$ pour $k \in \{2, \ldots, N\}$. En effet, du système $\mathscr{S}(A_N)$ on tire successivement $x_2 = \lambda x_1 = P_1(\lambda) x_1$, puis $x_3 = (\lambda P_1(\lambda) - P_0(\lambda)) x_1$, etc. De même, le système $(\mathscr{S}(A_N))$ montre que l'on a $x_{N-k} = P_k(\lambda) x_N$ pour $k \in \{1, \ldots, N-1\}$.

5.a) Avec les notations du **2**, on a pour tout x,

$$\Delta(x) \overset{\text{déf}}{=} 4\|x\|^2 - \|A_N x\|^2 = 4 \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right) - \left(x_2^2 + (x_1 + x_3)^2 + \ldots + (x_{N-2} + x_N)^2 + x_{N-1}^2 \right)$$

[1] Cette notation est provisoire : la suite du problème en imposera une autre.

Pour $N \geqslant 4$, cela est encore égal à $2x_1^2 + x_2^2 + x_{N-1}^2 + 2x_N^2 + \sum_{i=1}^{N-2} (x_i - x_{i+2})^2$. Cela montre que Δ est une forme quadratique définie positive et **1.a** montre que $\|A_N\|^2 < 4$. Si l'on choisit $x = y$ tel que $y_1 = \ldots = y_N = 1$, on a, pour cet y, $\Delta(y) = 6 = \dfrac{6}{N}\|y\|^2$. Cela montre que la forme quadratique $x \longmapsto \Delta(x) - \dfrac{6}{N}\|x\|^2$ n'est pas définie positive, d'où suit que $4 - \dfrac{6}{N} \leqslant \|A_N\|^2$. Enfin, reste à vérifier la propriété pour $N = 2, 3$, ce qui est laissé en exercice au lecteur.
Variante : il est plus classique de remarquer que, si $0 < \vartheta < \pi$, on a $P_N(2\cos\vartheta) = \dfrac{\sin(N+1)\vartheta}{\sin\vartheta}$, d'où suit que les N réels distincts $2\cos\dfrac{k\pi}{N+1}$, avec $1 \leqslant k \leqslant N$, sont zéros de P_N pour $N \geqslant 1$. Il n'y a donc pas d'autres zéros de ce polynôme, de sorte que $\|A_N\| = 2\cos\dfrac{\pi}{N+1}$; le reste de la vérification est alors aisé.
5.b) Cela découle trivialement de la variante *supra*. Cela étant, la relation de l'énoncé (question **3.b**) permet une récurrence facile : $\|A_N\|$ est le plus grand zéro de P_N, voir **1.a**, sachant que P_N est pair ou impair, et on a $\|A_2\| < \|A_3\|$; si $\|A_{N-2}\| < \|A_{N-1}\|$, on a $P_N(\|A_{N-1}\|) = -P_{N-2}(\|A_{N-1}\|) < 0$ puisque le polynôme unitaire P_{N-2} ne prend que des valeurs > 0 pour des valeurs de la variable strictement supérieures à son plus grand zéro. Comme P_N est aussi unitaire, cela montre que $\|A_N\| > \|A_{N-1}\|$.

6) Nous savons que $\|A_N\|$ est aussi la plus grande valeur propre λ_N de A_N. Un vecteur propre associé à λ_N est ${}^t(1, P_1(\lambda_N), \ldots, P_{N-1}(\lambda_N))$ et ces coefficients sont tous > 0 puisque, vu **5.b**, on a $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$.

Troisième partie

7.a) Avec ces notations, x est vecteur propre associé à la valeur propre λ_c si, et seulement si,

$$\left\{\begin{array}{ccc} e^{2ic} + e^{Nic} & = & \lambda_c e^{ic} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{ic} + e^{(N-1)ic} & = & \lambda_c e^{Nic} \end{array}\right.$$

On constate que, si $e^{Nic} = 1$, alors toutes les lignes de ce système sont proportionnelles. On obtient donc N vecteurs propres comme il suit : on pose $c_k = 2ki\pi/N$, avec $0 \leqslant k \leqslant N-1$, et le vecteur x est alors un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_{c_k} = 2\cos\dfrac{2ki\pi}{N}$. Inversement, si on additionne toutes les lignes de ce système, on constate qu'il *implique* que, soit $e^{Nic} = 1$, soit $\lambda_c = 2$. Le premier cas vient d'être envisagé, et $\lambda_c = 2$ implique $e^{ic} + e^{3ic} = 2e^{2ic}$, c'est-à-dire encore une fois $c = 2k\pi$, de sorte qu'aucun autre x_c ne peut convenir.
7.b) Les vecteurs ainsi trouvés forment déjà une famille orthogonale : on a en effet $(x_{c_k}|x_{c_\ell}) = \sum_{p=1}^{N} e^{2p(\ell-k)i\pi/N}$ et cette somme géométrique vaut N si, et seulement si, N divise $\ell - k$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\ell = k$, et 0 sinon. Il suffit enfin de les normaliser en les divisant par leur norme, qui est $\sqrt{N}$ pour chacun d'entre eux.
7.c) Nous avons trouvé une base de vecteurs propres ; il n'y a donc pas d'autres valeurs propres.

8.a) Allons bon ! Il faut aussi deviner le produit hermitien sur F. Essayons $(f|g) = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{f(k)}g(k)$.
Montrer que Φ est unitaire revient à montrer que, pour tout $f \in F$,

$$\sum_p \left(\sum_q \alpha^{pq}\overline{f(q)} \sum_r \alpha^{-pr} f(r) \right) = N \sum_p \overline{f(p)} f(p)$$

Or, c'est encore une fois une conséquence immédiate de la formule $\sum_{p=0}^{N-1} \alpha^{pq-pr} = \begin{cases} N & \text{si } N \text{ divise } (q-r) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

L'inverse de Φ est alors son adjoint Φ^* défini, pour $f \in F$, par $\Phi^*(f)(p) = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=0}^{N-1} \alpha^{pq} f(q)$.

8.b) On a, pour $f \in F$ et $p \in \mathbb{Z}$, $\Omega(f)(p) = \sum_{q,\, r} \alpha^{-pr} \left(\alpha^{(r-1)q} + \alpha^{(r+1)q} f(q)\right)$. La même formule qu'en **8.a** donne $\Omega(f)(p) = (\alpha^p + \alpha^{-p})\, f(p)$, c'est-à-dire $2\cos \dfrac{2p\pi}{N} f(p)$.

8.c) Désignons par f_k, où $1 \leqslant k \leqslant N$, l'élément de F défini par $f_k(p) = \delta_{k,\, p}$ pour $1 \leqslant p \leqslant N$. C'est une base $\mathscr{B}_F$ de vecteurs propres de Ω, associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_k = 2\cos \dfrac{2k\pi}{N}$. On a donc $\Psi\left(\Phi^*(f_k)\right) = \lambda_k \Phi^*(f_k)$, de sorte que les $\Phi^*(f_k)$, dont le calcul qui suit montrera qu'ils sont non nuls, sont des vecteurs propres de Ψ pour les valeurs propres λ_k. Or, la matrice de Ψ dans $\mathscr{B}_F$ est justement A ; donc, on a obtenu une base propre de A, formée des vecteurs ${}^t\!(\Phi^*(f_k)(0),\ \ldots\ ,\ \Phi^*(f_k)(N-1))$.

Maintenant, on a, pour $1 \leqslant p \leqslant N$, $\Phi^*(f_k)(p) = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=1}^{N} \alpha^{pq} \delta_{k,\, q} = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \alpha^{kp}$, ce qui confirme les résultats antérieurs.

Quatrième partie

9) Puisque la trace de A est nulle, on a $\lambda \geqslant 0$. Supposons que $\sum_{j=1}^{N} a_{i,\, j} x_j = \lambda x_i$ pour tout i. On a alors $\sum_{j=1}^{N} a_{i,\, j} |x_j| \geqslant \lambda |x_i|$ pour tout i, de sorte que $\sum_{i,\, j} a_{i,\, j} |x_i||x_j| \geqslant \lambda \sum_i |x_i|^2$. Vu les **1.b** et **1.c**, on a bien établi que $|x| \in E_\lambda$.

10.a) Soit j_0 tel que $x_{j_0} > 0$; il existe dans E une chaîne $i_0 = k_0,\, k_1,\ \ldots\ ,\, k_r = j_0$. Considérons les réels $x_{k_0},\ \ldots\ ,\, x_{k_r}$; le premier est nul et le dernier est > 0 : il existe donc deux termes consécutifs dont l'un est nul et l'autre > 0. Comme E est symétrique, on a donc trouvé $(u,\, v) \in E$ tel que $x_u = 0$ et $x_v > 0$.

10.b) L'idée toute simple est que le numérateur augmente plus vite que le dénominateur ! On a en effet $\|x_\varepsilon\|^2 = \|x\|^2 + \varepsilon^2$ alors que $(Ax_\varepsilon | x_\varepsilon) = (Ax|x) + 2\ell\varepsilon + \mathrm{O}(\varepsilon^2)$, avec $\ell = \sum_j a_{u,\, j} x_j \geqslant a_{u,\, v} x_v > 0$.

D'où suit que $\dfrac{(Ax_\varepsilon | x_\varepsilon)}{\|x_\varepsilon\|^2} = \dfrac{(Ax|x)}{\|x\|^2} + 2\dfrac{\ell\varepsilon}{\|x\|^2} + \mathrm{O}(\varepsilon^2) > \dfrac{(Ax|x)}{\|x\|^2}$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Remarque. On pouvait simplifier l'argument *supra* comme il suit : on désigne par e_u le u–ième vecteur canonique, et on constate que $0 = \lambda(x|e_u) = (Ax|e_u) = (x|Ae_u) \geqslant a_{u,\, v} x_v > 0$. *Reductio ad absurdum.*

10.c) Cela contredit **1.b**, et donc *tout* vecteur propre associé à λ a ses composantes de même signe *strict* : en effet, si $x \in E_\lambda$, alors le vecteur propre « positif » $|x| \in E_\lambda$ et les coefficients de $|x|$, donc aussi ceux de x, sont tous non nuls. Si l'un des x_i est < 0, on considère $|x| + x \in E_\lambda$; ce vecteur ne peut être propre puisque l'un de ses coefficients est nul. Donc $|x| + x = 0$ et x a tous ses coefficients < 0.

11) Comme en **2**, il suffit de montrer que E_λ ne peut contenir deux vecteurs x et y non colinéaires. Or, si cela était le cas, on aurait *par exemple* $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$ et on trouverait, par résolution d'un système de Cramer de taille 2 en les scalaires a et b, un vecteur propre $z = ax + by$ tel que $z_1 = 0$ et $z_2 = 1$, ce qui va à l'encontre de **10.c**.

Scholie. *Nihil novi sub sole :* la matrice tridiagonale A_N de la partie II a déjà fait l'objet de maint sujet de concours (on la rencontre notamment dans des problèmes de discrétisation d'équations différentielles) ; de même, la matrice circulante de la partie III a fait couler tout autant d'encre à ce jour.