Concours Mines-Ponts 2006

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 1

rédigé par Stéphane Legros (stephane.legros@free.fr)

I. Calculs préliminaires

1,2) Comme x et T sont positifs, Tx l'est également. On peut ensuite écrire, pour $\theta \geq 0$:

$$\theta \in \Gamma_x \iff \forall i \in \{1,\dots,n\}, \theta x_i \leq (Tx)_i$$

Pour un i tel que $x_i = 0$, θx_i est nul et est toujours inférieur à $(Tx)_i$. Nous en déduisons donc :

$$\theta \in \Gamma_x \iff \forall i \in \{1,\dots,n\} \text{ t.q. } x_i \neq 0,\ \theta \leq \underbrace{\frac{(Tx)_i}{x_i}}_{\geq 0}$$

Comme l'un au moins des x_i est non nul, cela donne $\Gamma_x = \left[0, \min\left\{\frac{(Tx)_i}{x_i},\ 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0\right\}\right]$ ce qui prouve que Γ_x est non vide, fermé et borné, et que son plus grand élément est :

$$\theta(x) = \min\left\{\frac{(Tx)_i}{x_i},\ 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0\right\}$$

3) Pour $\alpha > 0$ et $x \in B$, nous avons $x_i \neq 0$ si et seulement si $(\alpha x)_i \neq 0$, et pour un tel i, $\frac{(Tx)_i}{x_i} = \frac{(T(\alpha x))_i}{(\alpha x)_i}$. La relation précédente donne donc $\theta(x) = \theta(\alpha x)$.

4) Soit $x \in B$ et choisissons i_0 tel que $x_{i_0} > 0$. Nous avons alors $(Px)_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{p_{i,j}x_j}_{\geq 0} \geq p_{i,i_0}x_{i_0} > 0$ pour tout i et donc $Px > 0$: nous avons démontré que $P(B) \subset B^+$.

5) Soit $\theta \in \Gamma_x$. Comme P est positive, $\theta x \leq Tx$ donne $P(\theta x) \leq PTx$, i.e. $\theta Px \leq T(Px)$ puisque P et T commutent (P est un polynôme en T). On en déduit que $\Gamma_x \subset \Gamma_{Px}$, puis que $\theta(x) \leq \theta(Px)$.

Notons $y = Px$. Nous savons (question 4) que y est strictement positif. Comme T est positive et non nulle (sinon, P serait égale à I_n et ne serait pas strictement positive), Ty est strictement positif. On en déduit que $\theta(Px) > 0$ d'après la formule de la question 2).

6) Si $Tx = \lambda x$, alors $\lambda = \theta(x) > 0$ et $Px = (1+\lambda)^{n-1}x$. On en déduit que $\theta(Px) = \theta(x)$ d'après la question 3).

7) Notons $\lambda = \theta(x)$ et supposons que x ne soit pas un vecteur propre pour T associé à λ. Le vecteur $y = Tx - \lambda x$ est alors élément de B. D'après la question 4), Py est élément de B^+, ce qui donne $\lambda(Px) < PTx = T(Px)$. Ainsi, pour tout i, nous avons (en remarquant que $Px > 0$), $\lambda < \frac{(T(Px))_i}{(Px)_i}$ et en particulier :

$$\theta(x) = \lambda < \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(T(Px))_i}{(Px)_i} = \theta(Px)$$

Nous avons donc démontré par contraposée la propriété demandée.

8) Pour tout i, l'application $x \mapsto (Tx)_i/x_i$ est continue sur B^+ (c'est le quotient de deux formes linéaires). On en déduit que l'application $\varphi\ :\ x \mapsto \min\limits_{1\leq i\leq n} \dfrac{(Tx)_i}{x_i}$ est continue sur B^+ : comme $P(C) \subset P(B) \subset B^+$, la restriction de φ à $P(C)$ est donc continue, i.e. que θ est continue sur $P(C)$.

9) $C = \Sigma \cap B = \Sigma \cap \{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ (intersection d'un fermé borné et d'un fermé) : il est donc compact. L'application $x \mapsto Px$ étant continue, $P(C)$ est une partie compacte. L'application θ restreinte à ce compact non vide étant continue, elle est bornée et atteint ses bornes : il existe en particulier x_0 dans $P(C)$ tel que $\theta(x_0) = \sup\limits_{x\in P(C)} \theta(x)$.

10) Si $x \in C$, $Px \in P(C)$ et $\theta(x) \leq \theta(Px) \leq \sup\limits_{y\in P(C)} \theta(y)$. Ceci prouve l'inégalité demandée.

11) Si $x \in B$, $y = x/||x||_1$ est élément de C et $\theta(x) = \theta(y)$ d'après 3). Ceci prouve que $\sup\limits_{x\in B} \theta(x) \leq \sup\limits_{x\in C} \theta(x)$. L'inégalité inverse est évidente, puisque $C \subset B$.

12) Comme $P(C) \subset B^+ \subset B$, nous avons directement $\sup\limits_{x\in C} \theta(x) \leq \sup\limits_{x\in P(C)} \theta(x) \leq \sup\limits_{x\in B} \theta(x) = \sup\limits_{x\in C} \theta(x)$, soit :

$$\sup_{x\in C} \theta(x) = \sup_{x\in P(C)} \theta(x) = \theta(x_0).$$

13) Comme x_0 est élément de $P(C)$, il est élément de B^+ et est donc strictement positif.

Il existe $y_0 \in B$ tel que $x_0 = Py_0$; la question 5) donne alors $\theta_0 = \theta(Py_0) > 0$.

Enfin, $\theta(x_0) \leq \theta(Px_0) \leq \sup\limits_{x\in B} \theta(x) = \theta(x_0)$, donc $\theta(x_0) = \theta(Px_0)$ et, d'après la question 7), x_0 est un vecteur propre pour T associé à la valeur propre θ_0.

II. Une méthode d'approximation

14) Pour tout i compris entre 1 et n, nous avons $\theta x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{i,j} x_j$, et donc $|\theta||x_i| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} t_{i,j}|x_j|$, ce qui donne $|\theta|\, x^+ \leq Tx^+$.

15) Comme $x^+ \in B$, $|\theta| \leq \theta(x^+) \leq \sup\limits_{y\in B} \theta(y) = \theta_0$.

16) $$|\theta|\, ||x^+||_1 = ||\theta x||_1 = ||Tx||_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} t_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} t_{i,j}|x_j| = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} t_{i,j} \right)}_{=1} |x_j| = ||x||_1 = ||x^+||_1.$$

17) Le vecteur $x = (1, 1, \ldots, 1)$ est un vecteur propre pour ${}^tT$, associé à la valeur propre 1. On en déduit que 1 est également valeur propre de T (T et ${}^tT$ ont même polynôme caractéristique). La question 15) donne donc $1 \leq \theta_0$.

D'autre part, la question 13) prouve que θ_0 est une valeur propre de T : on a donc $\theta_0 \leq 1$ d'après la question 16).

18) Tout d'abord, les matrices T^j et R_j sont clairement positive. Ensuite, pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ la condition :

$$\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \sum_{1 \leq i \leq n} m_{i,j} = 1$$

signifie que le vecteur $e = (1, \ldots, 1)$ est un vecteur propre pour ${}^tM$ associé à la valeur propre 1. Comme ${}^tTe = e$, on obtient ensuite facilement, par récurrence sur j, que ${}^tT^je = e$, puis que ${}^tR_je = e$. Ceci achève de prouver que les matrice T^j et R_j sont stochastiques.

19) Si M est une matrice stochastique, le calcul fait à la question 16) montre que $||Mx||_1 \leq ||x||_1$ pour tout vecteur x. On en déduit que $||M||_1 \leq 1$, et en particulier $||T^k||_1 \leq 1$ et $||R_k||_1 \leq 1$ pour tout $k \geq 1$.

20) Pour $k \geq 1$, $TR_k - R_k = \dfrac{1}{k}(T^k - I_n)$, donc $||TR_k - R_k||_1 \leq \dfrac{1}{k}\left(||T^k||_1 + ||I_n||_1\right) \leq \dfrac{2}{k}$ (car $||I_n||_1 = 1$).

21) Pour $x \in \mathbb{C}^n$, nous avons $||R_kx||_1 \leq ||R_k||_1\, ||x||_1 \leq ||x||_1$ pour tout $k \geq 0$. La suite $(R_kx)_{k\geq 0}$ est donc une suite bornée de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}^n, ||\ ||_1)$. Comme cet espace est de dimension finie, le théorème de Bolzano-Weïerstrass assure l'existence d'une valeur d'adhérence.

22) Il existe donc une application $\sigma\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $R_{\sigma(k)}x \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$. On en déduit que $TR_{\sigma(k)}x - R_{\sigma(k)}x$ tend vers $Ty - y$ quand k tend vers l'infini.

D'autre part, $||TR_{\sigma(k)}x - R_{\sigma(k)}x||_1 \leq ||TR_{\sigma(k)} - R_{\sigma(k)}||_1\, ||x||_1 \leq \dfrac{2}{\sigma(k)}\, ||x||_1 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, donc $Ty = y$, puis $T^jy = y$ pour tout $j \geq 0$, et enfin $R_ky = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} T^jy = y$ pour tout $k \geq 1$.

23) Soient $m, l \geq 1$. Comme R_l et R_m commutent (ce sont deux polynômes en T), nous avons directement :

$$R_l(R_mx - z) - R_m(R_lx - y) = R_lR_mx - R_lz - R_lR_mx + R_my = y - z$$

24) Supposons comme à la question précédente que y et z sont deux valeurs d'adhérence de la suite (R_kx). Il existe alors $\sigma, \sigma'\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ strictement croissantes telles que $R_{\sigma(k)}x \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$ et $R_{\sigma'(k)}x \xrightarrow[k\to+\infty]{} z$. Nous avons alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
||y - z||_1 &= \left|\left|R_{\sigma(k)}(R_{\sigma'(k)}x - z) - R_{\sigma'(k)}(R_{\sigma(k)}x - y)\right|\right|_1 \\
&\leq \underbrace{||R_{\sigma(k)}||_1}_{\leq 1}\, ||R_{\sigma'(k)}x - z||_1 + \underbrace{||R_{\sigma'(k)}||_1}_{\leq 1}\, ||(R_{\sigma(k)}x - y)||_1 \\
&\leq ||R_{\sigma'(k)}x - z||_1 + ||R_{\sigma(k)}x - y||_1 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $y = z$: la suite (R_kx) possède donc une et une seule valeur d'adhérence.

25) On en déduit que pour tout x, la suite (R_kx) est convergente (une suite d'un compact qui ne possède qu'une valeur d'adhérence est convergente). Notons donc f l'application :

$$\begin{array}{rccc}
f\ : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\
 & x & \longmapsto & \lim\limits_{+\infty} R_kx
\end{array}$$

f est clairement linéaire, puisque si $x, y \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a $R_k(\lambda x + \mu y) = \lambda R_k(x) + \mu R_k(y)$ pour tout k, ce qui donne $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ quand k tend vers l'infini. En en déduit qu'il existe une matrice R telle que $\forall\, x \in \mathbb{C}^n$, $Rx = f(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} R_kx$.

En choisissant pour x le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, nous en déduisons que la i-ème colonne de R_k converge vers la i-ème colonne de R. Ceci prouve que la suite (R_k) converge vers R "terme à terme", i.e. pour $|| \ ||_\infty$. Les normes étant équivalentes en dimension finie, on en déduit que R_k tend également vers R au sens de la norme $|| \ ||_1$ quand k tend vers l'infini.

Remarque : on peut évidemment se passer de l'équivalence des normes en remarquant que $|| \ ||_1 \leq n|| \ ||_\infty$.

26) T commute avec chaque R_k, donc, par continuité du produit matriciel, T commute avec $R = \lim_{+\infty} R_k$.

27) En faisant tendre k vers l'infini dans l'inégalité de la question 20), nous obtenons $||TR - R||_1 = 0$, soit $R = TR = RT$. On en déduit que $RT^j = R$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, puis :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ RR_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} RT^j = R$$

ce qui donne enfin $R^2 = R$ en faisant tendre k vers l'infini.

28) R est une projection : elle est donc caractérisée par ses espaces propres $\mathrm{Ker}\,(R)$ et $\mathrm{Ker}\,(R - I_n) = \mathrm{Im}\,(R)$.

Comme $(T - I_n)R = 0$, on a $\mathrm{Im}\,(R) \subset \mathrm{Ker}\,(T - I_n)$. D'autre part, si $x \in \mathrm{Ker}\,(T - I_n)$, $R_k(x) = x$ pour tout $k \geq 1$ et donc $R(x) = x$: ceci prouve que $x \in \mathrm{Im}\,(R)$, ce qui donne $\mathrm{Im}\,(R) = \mathrm{Ker}\,(T - I_n)$.

Enfin, $R(T - I_n) = 0$ donne $\mathrm{Im}\,(T - I_n) \subset \mathrm{Ker}\,(R)$. Par la formule du rang, nous avons :

$$\dim\,(\mathrm{Ker}\,(R)) = n - \dim\,(\mathrm{Im}\,(R)) = n - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(T - I_n)) = \dim\,(\mathrm{Im}\,(T - I_n))$$

et donc $\mathrm{Ker}\,(R) = \mathrm{Im}\,(T - I_n)$.

Ceci prouve que R est la projection sur l'espace propre $\mathrm{Ker}\,(T - I_n)$ parallèlement à l'espace $\mathrm{Im}\,(T - I_n)$ (ces deux sous-espaces étant en particulier supplémentaires).

29) Comme $\mathrm{Ker}\,(T - I_n)$ est de dimension 1, il est engendré par le vecteur x_0. D'autre part, T étant stochastique, les vecteurs colonnes de la matrice $T - I_n$ sont contenus dans l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Comme $\mathrm{Im}\,(T - I_n)$ est un hyperplan, on en déduit que c'est exactement l'ensemble des vecteurs x vérifiant $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Un élément x de B s'écrit alors d'une unique façon sous la forme :

$$x = \lambda\, x_0 + y$$

avec $y_1 + \cdots + y_n = 0$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n}(x_0)_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = \lambda \sum_{i=1}^{n}(x_0)_i$. Comme les deux vecteurs x_0 et x sont élément de B, cela donne $\lambda = \dfrac{||x||_1}{||x_0||_1}$. Nous avons ainsi calculé le projeté de x sur $\mathrm{Im}\,(R)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(R)$:

$$\forall\, x \in B,\ R(x) = ||x||_1\, \frac{x_0}{||x_0||_1}.$$

Ceci achève de démontrer le théorème de Perron-Froebenius : si y est élément de $\Sigma \cap B$, $||y||_1 = 1$ et l'égalité précédente s'écrit :

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^j(y) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{x_0}{||x_0||_1}$$

ce qui permet d'approximer le vecteur propre strictement positif unitaire associé à la valeur propre 1.

Remarque : l'énoncé du théorème est incomplet, la condition $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(T - I_n)) = 1$ étant essentielle pour obtenir la limite annoncée (sans elle, il n'y a pas a priori unicité du vecteur $x_0/||x_0||_1$).