ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2006 **FILIÈRE PC**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

***

Première partie

1. Pour $\ell = 2$, on constate que les séquences $\underline{a} = (1,1)$ et $\underline{b} = (1,-1)$ vérifient l'unique condition de corrélation $a_0a_1 + b_0b_1 = 0$ donc 2 appartient à $\mathcal{L}$.
Supposons que 3 appartienne à $\mathcal{L}$ et soient $\underline{a} = (a_0, a_1, a_2)$ et $\underline{b} = (b_0, b_1, b_2)$ deux séquences de longueur 3 complémentaires. On remarque que les conditions de corrélation sont insensibles à un changement de signe simultané de tous les a_i (ou de tous les b_i) et qu'on peut donc supposer $a_0 = b_0 = 1$. Les deux conditions à vérifier sont alors

$$\begin{cases} a_1(1+a_2) + b_1(1+b_2) = 0 \\ a_2 + b_2 = 0 \end{cases}$$

Il reste $1 + a_2 + \varepsilon(1 - a_2) = 0$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ (en reportant $b_2 = -a_2$ et en simplifiant par a_1) ce qui est impossible si $\varepsilon = 1$ et incompatible avec $a_2 \in \{-1, 1\}$ si $\varepsilon = -1$. Donc 3 n'appartient pas à $\mathcal{L}$.

$$\boxed{\text{2 appartient à } \mathcal{L} \text{ et 3 n'appartient pas à } \mathcal{L}.}$$

2. *Remarque préliminaire :* Si p et q sont deux entiers relatifs tels que $p \leq q$ et $\lambda_p, \ldots, \lambda_q$ des réels avec $\lambda_p\lambda_q \neq 0$, la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto \sum_{k=p}^{q} \lambda_k x^k$ est équivalente en 0^+ à $\lambda_p x^p$ et en $+\infty$ à $\lambda_q x^q$.
En particulier elle est bornée sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $p = q = 0$, c'est à dire si et seulement si elle est constante.

2.a) Notons ℓ_1 (resp. ℓ_2) la longueur de la séquence $\underline{a}$ (resp. $\underline{b}$). On a :

$$P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) = \sum_{j=0}^{\ell_1-1} a_j x^j \sum_{i=0}^{\ell_1-1} a_i x^{-i} = \sum_{k=-\ell_1+1}^{\ell_1-1} x^k \left(\sum_{i=\max(-k,0)}^{\min(\ell_1-k-1,\ell_1-1)} a_i a_{i+k} \right)$$

et en particulier $P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{a_0 a_{\ell_1-1}}{x^{\ell_1-1}}$ et $P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) \underset{+\infty}{\sim} a_0 a_{\ell_1-1} x^{\ell_1-1}$.
Des calculs analogues montrent que $P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1}) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{b_0 b_{\ell_2-1}}{x^{\ell_2-1}}$ et $P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1}) \underset{+\infty}{\sim} b_0 b_{\ell_2-1} x^{\ell_2-1}$. On voit alors que la fonction $\phi_{\underline{a},\underline{b}}\ :\ x \mapsto P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) + P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1})$ ne peut pas être bornée sur $]0, +\infty[$ si $\ell_1 \neq \ell_2$.

$$\boxed{\text{Si } \underline{a} \text{ et } \underline{b} \text{ ne sont pas de même longueur, la fonction } x \mapsto P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) + P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1}) \text{ n'est pas bornée sur }]0, +\infty[.}$$

Supposons désormais $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de même longueur ℓ. On a donc :

$$\phi_{\underline{a},\underline{b}}(x) = \sum_{k=-\ell+1}^{\ell-1} x^j \left(\sum_{i=\max(-k,0)}^{\min(\ell-kj-1,\ell-1)} (a_i a_{i+k} + b_i b_{i+k}) \right) = \sum_{i=0}^{\ell-1}(a_i^2+b_i^2) + \sum_{k=1}^{\ell-1}(x^k+x^{-k}) \left(\sum_{i=0}^{\ell-k-1} (a_i a_{i+k} + b_i b_{i+k}) \right)$$

et d'après la remarque préliminaire cette fonction est constante si et seulement si :

$$\forall k \in [\![1, \ell-1]\!], \quad \sum_{i=0}^{\ell-k-1} (a_i a_{i+k} + b_i b_{i+k}) = 0$$

ce qui est exactement la définition de la propriété : « $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une paire complémentaire ». La valeur de la constante est alors $\sum_{i=0}^{\ell-1}(a_i^2 + b_i^2) = 2\ell$.

$$\boxed{\text{Les séquences } \underline{a} \text{ et } \underline{b} \text{ de même longueur } \ell \text{ forment une paire complémentaire si et seulement si la fonction } \phi_{\underline{a},\underline{b}} \text{ est constante. Cette constante vaut alors } 2\ell.}$$

2.b) Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ deux séquences de même longueur ℓ. Comme pour tout entier $i \in [\![0, \ell-1]\!]$ les éléments a_i et b_i valent ± 1, la différence $a_i - b_i$ vaut -2, 0 ou 2 et en tous cas elle est paire. La somme $\sum_{i=0}^{\ell-1}(a_i - b_i)$ est donc paire, or c'est précisément $P_{\underline{a}}(1) - P_{\underline{b}}(1)$. Soit k l'entier tel que $P_{\underline{b}}(1) = P_{\underline{a}}(1) + 2k$.
On calcule $2\ell = \phi_{\underline{a},\underline{b}}(1) = \left[P_{\underline{a}}(1)\right]^2 + \left[P_{\underline{b}}(1)\right]^2 = 2\left[P_{\underline{a}}(1)\right]^2 + 4kP_{\underline{a}}(1) + 4k^2 = 2\left(\left[P_{\underline{a}}(1)\right]^2 + 2kP_{\underline{a}}(1) + 2k^2\right)$
soit $\ell = \left[P_{\underline{a}}(1) + k\right]^2 + k^2$ qui est bien la somme de deux carrés d'entiers.

$$\boxed{\text{Tout élément de } \mathcal{L} \text{ peut s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers.}}$$

2.c) Soit n^2 un carré d'entier. L'entier n est pair ou impair, donc de la forme $2k$ ou $2k+1$. On voit que n^2 est de la forme $4k^2$ ou $4k^2 + 4k + 1$, donc de la forme $4m$ ou $4m + 1$. On en déduit que la somme de deux carrés d'entier est d'une des formes $4p + 4q$, $4p + (4q + 1)$ ou $(4p + 1) + (4q + 1)$, et que le reste de la division par quatre de la somme de deux carrés d'entiers ne peut valoir que 0, 1 ou 2. Un entier de la forme $4r + 3$ ne peut pas s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers, donc d'après **2.b)** n'est pas dans $\mathcal{L}$.

$$\boxed{\text{Le complémentaire dans } \mathbb{N} \text{ de } \mathcal{L} \text{ contient tous les entiers dont le reste dans la division par 4 est 3. Il est en particulier infini.}}$$

3.a) On calcule $U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1}) = \frac{1}{2}\phi_{\underline{a},\underline{b}}(x)$. Cette fonction est donc constante si et seulement si $\phi_{\underline{a},\underline{b}}$ l'est. La question **2.a)** permet de conclure.

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1}) \text{ est constante si et seulement si les séquences } \underline{a} \text{ et } \underline{b} \text{ forment une paire complémentaire.}}$$

3.b) Pour les valeurs proposées des séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ on a $\begin{cases} U(x) = x^5 + x^3 - x^2 + x + 1 \\ V(x) = x^9 + x^8 - x^7 - x^6 - x^4 \end{cases}$ et on calcule sans problème $U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1}) = 10$.

$$\boxed{\text{Les séquences } \begin{cases} \underline{a} = (1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, \ \ 1, \ \ 1) \\ \underline{b} = (1, 1, -1, 1, \ \ 1, 1, \ \ 1, \ \ 1, -1, -1) \end{cases} \text{ forment une paire complémentaire.}}$$

4. Soit $\underline{v}$ une séquence de longueur $2m-1$. Notons k le nombre de coordonnées de $\underline{v}$ égales à -1. Comme les autres sont égales à 1 on voit que $v_0+v_1+\cdots+v_{2m-1}=(2m-k)\times 1+k\times -1=2(m-k)$ et que $v_0v_1\cdots v_{2m-1}=1^{2m-k}(-1)^k=(-1)^k$. Avec ces notations :

(i) s'écrit « 4 divise $2(m-k)$ » soit « 2 divise $(m-k)$ ».

(ii) s'écrit « k a la même parité que m ».

(iii) s'écrit « $(-1)^k=(-1)^m$ ».

$$\boxed{\text{Les assertions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.}}$$

5.a) Soit $j\in[\![1,\ell-1]\!]$. Considérons la séquence $\underline{v}=(a_0a_j,\ldots,a_{\ell-1-j}a_{\ell-1},b_0b_j,\ldots,b_{\ell-1-j}b_{\ell-1})$ qui est de longueur $2m$ avec $m=\ell-j$. La complémentarité de la paire $\underline{a},\underline{b}$ implique justement que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2m-1}v_k=0$.

D'après la question **4.** ceci implique $\displaystyle\prod_{k=0}^{2m-1}v_k=(-1)^m$ soit $\displaystyle\prod_{k=0}^{m-1}v_kv_{k+m}=(-1)^{\ell-j}$. Comme d'autre part $v_kv_{k+m}=a_ka_{k+j}b_kb_{k+j}=x_kx_{k+j}$ le résultat s'écrit bien :

$$\boxed{\prod_{k=0}^{\ell-1-j}x_kx_{k+j}=(-1)^{\ell-j}.}$$

5.b) Raisonnons par récurrence. Soit $\mathscr{H}_r$ l'assertion « $x_rx_{\ell-1-r}=-1$ » pour un entier $r\in[\![0,\ell-1]\!]$.

◇ La propriété précédente appliquée pour $j=\ell-1$ s'écrit $\displaystyle\prod_{k=0}^{\ell-1-(\ell-1)}x_kx_{k+\ell-1}=(-1)^{\ell-(\ell-1)}$ soit $x_0x_{\ell-1}=-1$ c'est-à-dire $\mathscr{H}_0$.

◇ Soit $r\in[\![0,\ell-1]\!]$. Supposons établie $\mathscr{H}_k$ pour $k\in[\![0,r-1]\!]$; on a donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{r-1}x_kx_{\ell-1-k}=(-1)^r$. D'autre part la question **a)** pour $j=\ell-1-r$ fournit $\displaystyle\prod_{k=0}^{r}x_kx_{k+\ell-1-r}=(-1)^{r+1}$ que l'on peut réécrire $\displaystyle(-1)^{r+1}=\prod_{k=0}^{r}x_k\prod_{s=0}^{r}x_{s+\ell-1-r}=\prod_{k=0}^{r}x_k\prod_{k=0}^{r}x_{\ell-1-k}$ (avec $k=r-s$) $\displaystyle=\prod_{k=0}^{r}x_kx_{\ell-1-k}$. La confrontation des deux résultats donne $x_rx_{\ell-1-r}=-1$ c'est-à-dire $\mathscr{H}_r$.

$$\boxed{\text{Par récurrence on a bien établi la propriété : }\forall j\in[\![0,\ell-1]\!],\ x_jx_{\ell-1-j}=-1.}$$

5.c) Soit $\ell=2m+1$ un entier impair supérieur à 2. S'il existait une paire complémentaire $\underline{a},\underline{b}$ de longueur ℓ on aurait avec les notations précédentes pour $j=m$: $x_m^2=-1$ ce qui est exclu.

$$\boxed{\text{Tout élément }\ell\text{ de }\mathcal{L}\text{ supérieur à 2 est pair.}}$$

Deuxième partie

6.a) Les formules fournissent sans difficulté :

$$\boxed{P_1 = X+1, \quad Q_1 = -X+1, \quad P_2 = -X^3+X^2+X+1 \quad \text{et} \quad Q_2 = X^3-X^2+X+1.}$$

6.b) Posons $u_n = P_n(1)$ et $v_n = Q_n(1)$. Appliquées pour $X = 1$, les formules de récurrence deviennent $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n \end{cases}$ ou $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice A vérifie $A^2 = 2I_2$ donc $A^{2k} = 2^k I_2$ et $A^{2k+1} = 2^k A$. En utilisant $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on obtient :

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } k,\ P_{2k}(1) = 2^k,\ P_{2k+1}(1) = 2^{k+1},\ Q_{2k}(1) = 2^k \text{ et } Q_{2k+1}(1) = 0.}$$

Posant $u'_n = P_n(-1)$ et $v'_n = Q_n(-1)$, on a encore $\begin{pmatrix} u'_{n+1} \\ v'_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u'_n \\ v'_n \end{pmatrix}$, mais seulement à partir de $n = 1$. En utilisant $\begin{pmatrix} u'_n \\ v'_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} u'_1 \\ v'_1 \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ on obtient cette fois :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Pour tout entier naturel } k,\ P_{2k+1}(-1) = 0 \text{ et } Q_{2k+1}(-1) = 2^{k+1}. \\ P_0(-1) = Q_0(-1) = 1. \\ \text{Pour tout entier naturel } k \text{ au moins égal à 1, } P_{2k}(-1) = 2^k, \text{ et } Q_{2k}(-1) = -2^k. \end{array}}$$

7. Raisonnons par récurrence. Soit $\mathscr{H}_n$ l'assertion « P_n et Q_n sont des polynômes séquentiels de degré $2^n - 1$ ».

◇ $P_0 = Q_0 = 1$ montre que $\mathscr{H}_0$ est vraie.

◇ Soit $n \in N$. Supposons $\mathscr{H}_n$ établie : P_n et Q_n sont des polynômes de degré $2^n - 1$ dont tous les coefficients sont dans $\{-1, 1\}$ et donc $X^{2^n} Q_n$ est un polynôme de degré $2^{n+1} - 1$ dans lequel le coefficient de X^k est $\begin{cases} \text{nul} & \text{pour } k \in [\![0, 2^n - 1]\!] \\ \text{dans } \{-1,1\} & \text{pour } k \in [\![2^n, 2^{n+1} - 1]\!] \end{cases}$. On en déduit immédiatement que $P_n + X^{2^n} Q_n$ et $P_n - X^{2^n} Q_n$ sont séquentiels de degré $2^{n+1} - 1$ soit $\mathscr{H}_{n+1}$.

$$\boxed{\text{Les polynômes } P_n \text{ et } Q_n \text{ sont séquentiels de même degré.}}$$

On sait d'après la première partie que deux polynômes P et Q séquentiels de même degré forment une paire complémentaire si et seulement si la fonction $x \mapsto P(x)P(x^{-1}) + Q(x)Q(x^{-1})$ est constante. Or le calcul (facile) montre que $P_{n+1}(x)P_{n+1}(x^{-1}) + Q_{n+1}(x)Q_{n+1}(x^{-1}) = 2\Big(P_n(x)P_n(x^{-1}) + Q_n(x)Q_n(x^{-1})\Big)$ et comme $P_0(x)P_0(x^{-1}) + Q_0(x)Q_0(x^{-1}) = 2$ on voit que $P_n(x)P_n(x^{-1}) + Q_n(x)Q_n(x^{-1}) = 2^{n+1}$. On conclut par récurrence.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Pour tout entier naturel } n \text{ les polynômes } P_n \text{ et } Q_n \text{ forment une paire complémentaire.} \\ \text{Tout entier de la forme } 2^k \text{ pour } k \in \mathbb{N} \text{ est donc dans l'ensemble } \mathcal{L}. \end{array}}$$

8. Raisonnons par récurrence. Soit $\mathscr{H}_n$ l'assertion « $Q_n(z) = (-1)^n z^{2^n - 1} P_n(-z^{-1})$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ ».

◇ $\mathscr{H}_0$ s'écrit 1=1, ce qui est vrai.

$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons établie $\mathscr{H}_n$; on a donc $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ Q_n(z) = (-1)^n z^{2^n-1} P_n(-z^{-1})$. En remplaçant z par $-z^{-1}$ dans $\mathscr{H}_n$ on a aussi $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_n(z) = (-1)^{n+1} z^{2^n-1} Q_n(-z^{-1})$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{C}^*,\ Q_{n+1}(z) &= P_n(z) - z^{2^n} Q_n(z)\\ &= (-1)^{n+1} z^{2^n-1} Q_n(-z^{-1}) - z^{2^n}(-1)^n z^{2^n-1} P_n(-z^{-1})\\ &= (-1)^{n+1} z^{2^{n+1}-1}\Big(P_n(-z^{-1}) + z^{-2^n} Q_n(-z^{-1})\Big)\\ &= (-1)^{n+1} z^{2^{n+1}-1}\Big(P_n(-z^{-1}) + (-z^{-1})^{2^n} Q_n(-z^{-1})\Big)\\ &= (-1)^{n+1} z^{2^{n+1}-1} P_{n+1}(-z^{-1}) \qquad \text{c'est-à-dire } \mathscr{H}_{n+1}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Par récurrence on a montré : } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ Q_n(z) = (-1)^n z^{2^n-1} P_n(-z^{-1}).}$$

9.a) Soit z une racine de T. Notons $M = \max_{i\in[\![0,d-1]\!]}\left|\dfrac{t_i}{t_d}\right|$. On cherche à montrer la relation $|z| \leq 1 + M$. Remarquons déjà que si $|z| \leq 1$ c'est trivial. Supposons maintenant $|z| > 1$. On peut écrire la relation $T(z) = 0$ sous la forme $z^d = -\dfrac{t_{d-1}}{t_d} z^{d-1} - \cdots - \dfrac{t_0}{t_d}$ d'où $|z|^d \leq \left|\dfrac{t_{d-1}}{t_d} z^{d-1}\right| + \cdots + \left|\dfrac{t_0}{t_d}\right| \leq M\dfrac{|z|^d - 1}{|z| - 1} \leq M\dfrac{|z|^d}{|z|-1}$ d'où $1 \leq \dfrac{M}{|z|-1}$ c'est-à-dire :

$$\boxed{|z| \leq 1 + M.}$$

9.b) Soit n un entier naturel non nul. Les polynômes P_n et Q_n relèvent de l'analyse précédente avec $d = 2^n - 1$ et tous les rapports $\dfrac{t_i}{t_d}$ sont égaux à 1 en module, donc $M = 1$. Ainsi toute racine de P_n ou de Q_n est majorée par 2 en module. Mais si z est une racine de P_n (resp de Q_n) elle est non nulle et la formule établie en **8.** montre que $-z^{-1}$ est racine de Q_n (resp de P_n) donc que $\left|-z^{-1}\right| \leq 2$ soit $|z| \geq \dfrac{1}{2}$.

La majoration de $M\dfrac{|z|^d - 1}{|z|-1}$ par $M\dfrac{|z|^d}{|z|-1}$ si $|z| > 1$ est en fait stricte, on peut conclure plus précisément :

$$\boxed{\text{toute racine de } P_nQ_n \text{ vérifie } \frac{1}{2} < |z| < 2.}$$

10.a) On a vu en **7.** que le polynôme P_{n+1} a les mêmes coefficients que le polynôme P_n pour les termes de degré inférieur ou égal à $2^n - 1$. Par récurrence il en va de même de tous les P_k pour $k \geq n$. Si l'on note u_p le coefficient de X^p commun à tous les polynômes P_k pour $k \geq \log_2(p+1)$ on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(z) = \sum_{p=0}^{2^n-1} u_p z^p.}$$

Étant donné que tous les u_p valent 1 ou -1,

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } S(z) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p z^p \text{ vaut 1.}}$$

10.b) Soit $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ un zéro de S avec $\rho < \dfrac{1}{2}$. On peut écrire $0 = S(z) = 1 + \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} u_p z^p$ et par conséquent $1 = |-1| = \left|\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} u_p z^p\right| \leq \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} |u_p| \rho^p = \dfrac{\rho}{1-\rho}$ donc $1 \leq 2\rho$ ce qui est contradictoire.

$$\boxed{S \text{ n'a pas de zéro dans le disque ouvert de rayon } \frac{1}{2} \text{ centré à l'origine.}}$$