

I. Description des normes euclidiennes

1. Identité du parallélogramme.

a. Si N est une norme euclidienne attachée au produit scalaire φ alors :

$$N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = \varphi(x+y, x+y) + \varphi(x-y, x-y) = 2(\varphi(x, x) + \varphi(y, y)) = 2(N(x)^2 + N(y)^2) \quad \square$$

$$\|e_1 + e_2\|_\infty^2 + \|e_1 - e_2\|_\infty^2 = 2 \text{ et } 2(\|e_1\|_\infty^2 + \|e_2\|_\infty^2) = 4 \text{ donc } \|\cdot\|_\infty \text{ n'est pas euclidienne.}$$

b. $\|\cdot\|_2$ est naturellement euclidienne car attachée au produit scalaire canonique. \square

$$\text{Pour } p > 1 \text{ on a } \|e_1 + e_2\|_p^2 + \|e_1 - e_2\|_p^2 = 2 \times 2^{2/p} \text{ et } 2(\|e_1\|_p^2 + \|e_2\|_p^2) = 2 \times 2.$$

Donc si $p \neq 2$ la norme $\|\cdot\|_p$ n'est pas euclidienne. \square

2. $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ est clairement bilinéaire.

Elle est symétrique car, du fait que tXSY est un réel il est égal à sa transposée, donc (en utilisant que S est symétrique) : $\langle x, y \rangle_S = {}^tXSY = {}^t({}^tXSY) = {}^tY^tSX = {}^tYSX = \langle y, x \rangle_S$.

Elle est définie positive car $\langle x, x \rangle_S = {}^tX SX > 0$ pour $X \neq 0$ du fait que S est symétrique définie positive. \square

3. Par bilinéarité de φ , il vient $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \varphi(e_i, e_j) x_i y_j \right) = \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n \varphi(e_i, e_j) y_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i z_i = {}^tXZ$

avec $z_i = \sum_{j=1}^n \varphi(e_i, e_j) y_j$ i.e. $Z = SY$. Ainsi $\varphi(x, y) = {}^tXSY$.

La matrice S est évidemment symétrique par définition et définie positive compte tenu de l'égalité ci-dessus. \square

II. Quelques généralités et exemples.

4. $\text{Isom}(N)$ est non vide car contient Id_E et est bien inclus dans $\text{GL}(E)$ car une isométrie est clairement injective donc bijective (dimension finie).

Par ailleurs $\text{Isom}(N)$ est clairement stable par composition et enfin si $u \in \text{Isom}(N)$ alors

$$N(u(u^{-1}(x))) = N(u^{-1}(x)) \text{ soit } N(x) = N(u^{-1}(x)) \text{ donc } u^{-1} \in \text{Isom}(N).$$

Ainsi $\text{Isom}(N)$ est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$. \square

5. Une caractérisation géométrique des N -isométries.

• Soit u une isométrie. Il est immédiat que $u(\Sigma) \subset \Sigma$. Par ailleurs u^{-1} est également une isométrie donc $u^{-1}(\Sigma) \subset \Sigma$ d'où $u(u^{-1}(\Sigma)) \subset u(\Sigma)$ soit $\Sigma \subset u(\Sigma)$ (car $u(u^{-1}(\Sigma)) = (uou^{-1})(\Sigma) = \text{Id}(\Sigma) = \Sigma$). Ainsi $u(\Sigma) = \Sigma$.

• Réciproquement soit un endomorphisme u stabilisant la sphère unité. Soit x un élément quelconque non nul de E et soit $y = \frac{1}{N(x)}x$. Alors $y \in \Sigma$ donc $u(y) \in \Sigma$ i.e. $\frac{1}{N(x)}N(u(x)) = 1$ soit encore $N(u(x)) = N(x)$. Égalité encore vraie si $x = 0$. Donc u est bien une isométrie.

• Ainsi $\text{Isom}(N)$ est l'ensemble des endomorphismes de E stabilisant $\Sigma(N)$. \square

Remarque : on a en fait prouvé que si u est une isométrie $u(\Sigma) = \Sigma$ et que si u est un endomorphisme tel que $u(\Sigma) \subset \Sigma$ alors u est une isométrie (donc $u(\Sigma) = \Sigma$).

6. Notons $N = \|\cdot\|_1$. Alors $\Sigma(N)$ est le carré de sommets $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ et $(0, -1)$ conservé par la symétrie s mais pas par la rotation r . Ainsi s est une $\|\cdot\|_1$ -isométrie mais pas r . \square

7.

a.
$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à S . Sa matrice étant symétrique dans une base orthonormée, il est ortho-diagonalisable.

On remarque que $u(e_2) = 2e_2$ et $u(e_1 + e_2 + e_3) = 2(e_1 + e_2 + e_3)$ ce qui prouve que 2 est valeur propre et que le sous-espace propre associé E_2 est de dimension au moins 2. Le spectre de u est donc $(2, 2, \lambda)$. Par invariance de la trace il vient que $\lambda = 4$. D'ailleurs on remarque $u(e_1 - e_3) = 4(e_1 - e_3)$.

Ainsi E_4 est dirigé par $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$ et, puisque u est orthodiagonalisable, E_2 est le plan d'équation $x - z = 0$

dont une base orthonormée est constituée de $\varepsilon_2 = e_2$ et $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$.

Ainsi en notant $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ la matrice de passage et $D = \text{diag}(4, 2, 2)$, on a $S = PDP^{-1}$.

Or P est orthogonale car matrice de passage entre deux bases orthonormées donc $S = PD^tP$. \square

- c. Ce qui précède prouve que q est définie positive (les valeurs propres de l'endomorphisme symétrique canoniquement attaché sont strictement positives ou vérification immédiate à l'aide de la question précédente) donc la forme polaire définit un produit scalaire φ et alors $N_q = N_\varphi$. \square
- d et e. $\Sigma(N)$ a pour équation dans la base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$: $4X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 = 1$ donc il s'agit d'un ellipsoïde de révolution dont l'axe est dirigé par ε_1 c'est à dire par $e_1 - e_3$. \square
- f Il résulte alors de la question 5 que toute rotation d'axe $e_1 - e_3$ appartient à $\text{Isom}(N_q)$ qui de ce fait est bien infini. \square

III. Étude de $\text{Isom}(N)$ lorsque N est une norme euclidienne.

8. Caractérisation matricielle des isométries euclidiennes.

- a. Si un endomorphisme conserve le produit scalaire alors a fortiori il conserve le carré scalaire donc la norme. Réciproquement si u conserve la norme alors :
 $4 < u(x), u(y) > = N^2(u(x) + u(y)) - N^2(u(x) - u(y)) = N^2(u(x+y)) - N^2(u(x-y)) = N^2(x+y) - N^2(x-y) = 4 < x, y >$ donc u conserve le produit scalaire.
Ainsi un endomorphisme est une isométrie pour une norme euclidienne si et seulement si cet endomorphisme conserve le produit scalaire. \square
- b. En traduisant matriciellement le résultat précédent il vient que u est une isométrie si et seulement si, pour tout couple (X, Y) de $M_{n,1}(\mathbb{R})$:
 ${}^t(AX)S(AY) = {}^tXSY$ i.e. si et seulement si ${}^tX({}^tASA)Y = {}^tXSY$.
En prenant en particulier $X = e_i$ et $Y = e_j$ l'égalité ci-dessus implique que les éléments d'indice (i, j) de tASA et de S sont égaux donc que les deux matrices sont égales. Cette condition étant par ailleurs évidemment suffisante pour avoir l'égalité ci-dessus.
Ainsi l'endomorphisme u est une N_S -isométrie si et seulement si sa matrice A dans la base canonique vérifie ${}^tASA = S$. \square

Remarque : on retrouve en particulier avec $S = Id$ que u est une isométrie pour le produit scalaire canonique si et seulement si sa matrice dans la base canonique est orthogonale.

9. En liaison avec la remarque précédente on a en particulier $\text{ISOM}(\|\cdot\|_2) = O_n(\mathbb{R})$. \square

Ce groupe est infini car il contient en particulier les matrices $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ dont le cardinal est égal à celui de $[0, 2\pi[$. \square

10. Une application des polynômes interpolateurs.

- a. Si $P \in \text{Ker } u$ alors P est un polynôme de degré au plus r s'annulant en au moins $r+1$ réels deux à deux distincts donc P est le polynôme nul. Il en découle que u est injective donc est un isomorphisme puisque les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension finie.
D'où l'existence et l'unicité du polynôme L cherché à savoir $L = u^{-1}(y_0, y_1, \dots, y_r)$. \square
- b. Notons $\{x_0, \dots, x_r\}$ l'ensemble des réels $\sqrt{u_1}, \dots, \sqrt{u_n}$ (donc $r+1 \leq n$) et L le polynôme interpolateur de degré au plus r tel que $L(x_i) = x_i^2$. Alors naturellement $L(U) = V$. \square

11. Racines carrées dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

- a. Comme A est symétrique elle est orthodiagonalisable et, comme elle est en outre définie positive, ses valeurs propres sont strictement positives. Ainsi il existe P orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ telles que $S = PDP^{-1}$. Soit alors $A = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$.
Il vient $S = A^2$ et en outre A est bien symétrique (car P est orthogonale donc $A = P\Delta^tP$) et définie positive (puisque semblable à Δ donc à valeurs propres strictement positives : les λ_i). \square
- b. D'après la question 10.b., il existe un polynôme L tel que $L(D) = \Delta$ donc classiquement $L(PDP^{-1}) = P\Delta P^{-1}$ soit $L(S) = A$ donc $L(B^2) = A$ soit $Q(B) = A$ avec Q le polynôme $L \circ X^2$. \square
- Ainsi $AB = Q(B)X(B) = (QX)(B) = (XQ)(B) = X(B)Q(B) = BA$ par le classique morphisme de l'algèbre $\mathbb{R}[X]$ dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $P \mapsto P(B)$. \square

c. Soient M et N deux matrices symétriques définies positives et $X \in \text{Ker}(M + N)$. Alors $(M + N)X = 0$ donc a fortiori ${}^tX(M + N)X = 0$ soit ${}^tXMX + {}^tXNX = 0$ donc ${}^tXMX = {}^tXNX = 0$ puisque les deux termes sont positifs du fait que M et N sont positives. Donc $X = 0$ puisque en outre M par exemple est définie positive. On a en fait prouvé le résultat un peu plus général : la somme de deux matrices symétriques positives dont l'une est en outre définie est inversible. \square

d. Il vient $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$ puisque A et B commutent. Or $A^2 = B^2 (= S)$ donc $(A + B)(A - B) = 0$. Ainsi pour tout vecteur X on a $(A + B)(A(X) - B(X)) = 0$ donc $A(X) = B(X)$ puisque $A + B$ est inversible par la question précédente. Ainsi $A = B$. \square

12. Étude du groupe d'isométrie pour une norme euclidienne.

a. Soit M orthogonale. Il vient (car \sqrt{S} et $(\sqrt{S})^{-1}$ sont symétriques):

$$P \stackrel{\text{DEF}}{=} \left((\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S} \right) S \left((\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S} \right) = \sqrt{S} {}^t M (\sqrt{S})^{-1} S (\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S}.$$

Or $(\sqrt{S})^{-1} S (\sqrt{S})^{-1} = (\sqrt{S})^{-1} \sqrt{S} \sqrt{S} (\sqrt{S})^{-1} = \text{Id}$ donc $P = \sqrt{S} {}^t M M \sqrt{S} = \sqrt{S} \sqrt{S} = S$ puisque $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Donc $(\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S} \in \text{ISOM}(N_S)$ d'après la question 8.b.. \square

b. ψ est clairement linéaire. Elle est injective car si $\psi(M) = 0$ alors $\sqrt{S} \psi(M) (\sqrt{S})^{-1} = 0$ soit $M = 0$.

Pour établir qu'elle est surjective, il suffit d'établir que que si $P \in \text{ISOM}(N_S)$ alors $\sqrt{S} P (\sqrt{S})^{-1}$ est orthogonale.

Or d'après la question 8.b. on a ${}^t P S P = S$ donc ${}^t P \sqrt{S} \sqrt{S} P = S$ donc $(\sqrt{S})^{-1} {}^t P \sqrt{S} \sqrt{S} P (\sqrt{S})^{-1} = \text{Id}$. C'est à dire encore ${}^t \left(\sqrt{S} P (\sqrt{S})^{-1} \right) \left(\sqrt{S} P (\sqrt{S})^{-1} \right) = \text{Id}$ ce qui prouve bien que $\sqrt{S} P (\sqrt{S})^{-1}$ est orthogonale.

Ainsi ψ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sur $\text{ISOM}(N_S)$. En particulier $\text{ISOM}(N_S)$ est infini puisque $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'est. \square

Remarque : ce dernier résultat est évident directement car par le choix d'une base orthonormale on établit un isomorphisme entre tout espace euclidien et \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique ce qui prouve que les deux groupes orthogonaux sont isomorphes.

IV. Étude du cardinal de $\text{Isom}(p)$.

13. Endomorphismes de permutation signée.

a. Notons $\alpha = \sigma^{-1}$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ un vecteur quelconque de \mathbb{R}^n et $y = u_{\sigma, \varepsilon}(x)$. Il vient :

$$y = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i e_{\sigma(i)} = \sum_{j=1}^n \varepsilon_{\alpha(j)} x_{\alpha(j)} e_j \text{ donc } \|y\|_p^p = \sum_{j=1}^n |\varepsilon_{\alpha(j)} x_{\alpha(j)}|^p = \sum_{j=1}^n |x_{\alpha(j)}|^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p = \|x\|_p^p. \quad \square$$

b. $\mathcal{M}\left(u_{\sigma, \varepsilon}; (e_1, e_2, e_3, e_4)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. Inégalité de Holdër.

a. Si a ou b est nul, l'inégalité est claire. Sinon, en posant $\alpha = a^p$ et $\beta = b^q$, l'inégalité proposée se ramène à établir (par croissance de la fonction exponentielle) que $\frac{1}{p} \ln \alpha + \frac{1}{q} \ln \beta \leq \ln \left(\frac{1}{p} \alpha + \frac{1}{q} \beta \right)$. Or cette inégalité découle de la concavité de la fonction logarithme sur $]0, +\infty[$. \square

b. Commençons par remarquer que l'inégalité est évidente si l'un des deux vecteurs est nul. Sinon :

Lorsque $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$, il vient (d'après la question précédente) :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{q} y_i^q \right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n x_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n y_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

Dans le cas général, en notant $x' = \frac{1}{\|x\|_p} x$ et $y' = \frac{1}{\|y\|_q} y$, on a d'après le cas précédent $\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} |\langle x, y \rangle| \leq 1$ ce qui établit le résultat. \square

c. Pour $p = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz. \square

15. On a $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ et comme u est une p -isométrie, il vient $\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|^p = \|u(e_j)\|_p^p = \|e_j\|_p^p = 1$ \square

Donc $\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|^p \right) = n$. \square

16. Une formule clé de dualité.

a. Soit x fixé dans E . Alors $\varphi_x : y \mapsto \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire sur E de dimension finie donc est continue. Par ailleurs Σ_q est un fermé borné de E muni de la norme p (qui définit bien la topologie usuelle de E puisque toutes les normes sont équivalentes sur E de dimension finie). Donc Σ_q est un compact de E . Il en découle que φ_x est bornée sur Σ_q et atteint sa borne supérieure notée Q_x dans la suite. \square

b. Pour tout $y \in \Sigma_q$ on a, en vertu de l'inégalité de Hölder, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p$ donc $Q_x \leq \|x\|_p$.
Notons que si $x = 0$ naturellement $Q_x = 0 = \|x\|_p$.

Si $x \neq 0$ alors en notant y défini dans l'énoncé il vient :

$$1/ \|x\|_p^{p-1} \times x_i y_i = \varepsilon_i x_i |x_i|^{p-1} = |x_i| \cdot |x_i|^{p-1} = |x_i|^p \text{ si } x_i \neq 0 \text{ et cette égalité est encore vraie si } x_i = 0.$$

$$\text{Donc } \|x\|_p^{p-1} \times |\langle x, y \rangle| = \sum_{i=1}^n |x_i|^p = \|x\|_p^p \text{ soit encore } |\langle x, y \rangle| = \|x\|_p.$$

$$2/ \|y\|_q^q = \sum_{i=1}^n |y_i|^q = \sum_{i \in I} |y_i|^q = \|x\|_p^{(1-p)q} \sum_{i \in I} |x_i|^{(p-1)q}$$

en désignant par I l'ensemble non vide des indices i tels que $x_i \neq 0$.

$$\text{Or } (p-1)q = p \text{ donc } \|y\|_q^q = \|x\|_p^{-p} \sum_{i \in I} |x_i|^p = \|x\|_p^{-p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p = \|x\|_p^{-p} \|x\|_p^p = 1 \text{ donc } y \in \Sigma_q.$$

Il résulte alors de 1/ et 2/ que $Q_x \geq \|x\|_p$.

En conclusion finale $Q_x = \|x\|_p$ pour tout $x \in E$. \square

17. Soit u une p -isométrie et soit x un vecteur quelconque de E .

Il vient d'après la question précédente en échangeant les rôles de p et q :

$$\|u^*(x)\|_q = \max_{y \in \Sigma_p} |\langle u^*(x), y \rangle| = \max_{y \in \Sigma_p} |\langle x, u(y) \rangle|$$

Or comme u est une p -isométrie, on a $u(\Sigma_p) = \Sigma_p$ donc, lorsque y parcourt Σ_p , $u(y)$ parcourt également Σ_p . Ainsi $\|u^*(x)\|_q = \max_{z \in \Sigma_p} |\langle x, z \rangle| = \|x\|_q$. Donc u^* est bien une q -isométrie. \square

La matrice de u^* dans la base canonique (orthonormée pour le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$) est ${}^t A$. La question 15 prouve alors que $\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{j,i}|^q \right) = n$. \square

18. On suppose dans toute la suite du problème $p \neq 2$ donc $p \neq q$ et par exemple $p > q$ (symétrie des rôles de p et q).

a. Pour tout i on a $\alpha_i^p \leq \alpha_i^q$ (car $\alpha_i \in [0, 1]$ et $p > q$).

Par ailleurs s'il existait i_0 tel que $\alpha_{i_0} \in]0, 1[$ on aurait $\alpha_{i_0}^p < \alpha_{i_0}^q$ donc on aurait $\sum_{i=1}^r \alpha_i^p < \sum_{i=1}^r \alpha_i^q$ ce qui est exclu.

Donc α_k ne peut prendre que 2 valeurs : 0 et 1. \square

b. Nous avons d'après les questions 15 et 17 : $\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|^p \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{j,i}|^q \right)$ soit $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|^p = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|^q$ donc les seules valeurs possibles des $|a_{i,j}|$ sont 0 et 1. \square

19. D'après la question 15 on a pour tout j : $\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|^p = 1$ et de même en considérant $u^* : \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^q = 1$ pour tout i .

Comme les seules valeurs possibles des $|a_{i,j}|$ sont 0 et 1, il en résulte que dans chaque colonne tous les termes $a_{i,j}$ sont nuls sauf l'un égal à ± 1 . De même pour chaque ligne. Ce qui prouve que les colonnes forment une base $(\varepsilon_1 e_{\sigma(1)}, \varepsilon_2 e_{\sigma(2)}, \dots, \varepsilon_n e_{\sigma(n)})$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$ et $\sigma \in \mathcal{P}_n$.

Ainsi toute p -isométrie u est du type $u_{\sigma, \varepsilon}$. Réciproquement toute application de ce type est une p -isométrie d'après la question 13.

Le groupe des p -isométrie pour $p \neq 2$ est donc le groupe des permutations signées de \mathbb{R}^n .

Comme l'application $(\sigma, \varepsilon) \mapsto u_{\sigma, \varepsilon}$ est injective, son cardinal est $2^n n!$. \square

————— FIN —————