

Epreuve de Maths II Concours Centrale -Supélec 2008 filière MP

Partie I

I.A. 1) La matrice A est triangulaire supérieure. ses coefficients diagonaux sont non nuls

$$\begin{cases} a_{1,1}u_1 + a_{1,2}u_2 + \dots + a_{1,n}u_n = w_1 \\ a_{2,2}u_2 + \dots + a_{2,n}u_n = w_2 \\ \dots \\ a_{n,n}u_n = w_n \end{cases}$$

donc $u_n = \frac{w_n}{a_{n,n}}$, puis

$$\forall k \in [[1, n-1]], a_{n-k,n-k}u_{n-k} + \dots + a_{n-k,n}u_n = w_{n-k}$$

donc

$$u_{n-k} = \frac{1}{a_{n-k,n-k}} \left(w_{n-k} - \sum_{i=n-k+1}^n a_{n-k,i}u_i \right)$$

Algorithme:

u[n]:=w[n]/a[n,n];

for k from 1 to n-1 do u[n-k]:=1/a[n-k,n-k]*(w[n-k]-sum(a[n-k,i]*u[i],i=n-k+1..n))

od;

I.A. 2) il faut pour le calcul de $u[n-k]$ lorsque $k \in [[0, n-1]]$, k additions, k multiplications et 1 division

donc en tout $\frac{n(n-1)}{2}$ additions et multiplications et n divisions

I.B.1) soit $q \in [[1, n]]$. $L_q(MA)$ est la ligne q de la matrice $P = MA$, c'est donc le vecteur

$$\begin{aligned} L_q(MA) &= \left(\sum_{j=1}^n m_{q,j}a_{j,1}, \dots, \sum_{j=1}^n m_{q,j}a_{j,n} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n m_{q,j}(a_{j,1}, \dots, a_{j,n}) \end{aligned}$$

donc

$$L_q(MA) = \sum_{j=1}^n m_{q,j}L_j(A)$$

I.B.2) a) On voit que la relation qui définit A en fonction de P est $A = F(k, \beta)^{-1}P$ correspond à $L_i = L'_i - \beta L_k$ ce qui caractérise $F(k, -\beta)$

1.B.2.b) $D_q(P) = \det \Delta_q(F(k, \beta)A)$ or puisque les k premières lignes de P sont identiques à celle de A les matrices mineures $\Delta_q(P)$ pour $1 \leq q \leq k$ sont identiques à $\Delta_q(A)$ et les déterminants sont donc égaux

I.B.2.c) à l'aide de la question IB1 $L'_q = L_q(F(k, \beta)A) = \sum_{j=1}^n m_{q,j}L_j(A)$ donc:

si $q \leq k$, $m_{q,j} = \delta_{q,j}$ et si $q \in [[k+1, n]]$, $m_{q,q} = 1$, $m_{q,k} = \beta_q$ les autres sont nuls donc

$$F(k, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \beta_{k+1} & 1 & & \\ & & \vdots & & 1 & \\ & & \beta_n & & & 1 \end{pmatrix}$$

toutes les places vide sont nulles.

On en déduit que la matrice P_q est triangulaire inférieure ($P_q \in \mathcal{TT}_n$)

En particulier pour $q = n - 1$:

$$P_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta_{2,1} & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & & \ddots & & \\ & \ddots & & 1 & \ddots & \\ & & & \beta_{q+1,q} & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & & \beta_{n,q} & \beta_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} = [b_1, \dots, b_{n-1}, e_n]$$

(Remarque : le vecteur β_n n'est pas défini , il faut donc supposer $q \leq n - 1$)

I.C.1) $\Delta_1(A) = (a_{1,1})$ est inversible donc $a_{1,1} \neq 0$. On a $A_1 = A$

$A_2 = F(1, -\beta_1)A_1$ admet pour lignes $L'_1 = L_1$ et $\forall i \geq 2, L'_i = L_i - \beta_{i,1}L_1$ avec les notations précédentes (L_i sont les lignes de A)

pour que la première colonne de A_2 soit proportionnelle à e_1 il faut et il suffit que

$$\forall i \geq 2, a_{i,1} - \beta_{i,1}a_{1,1} = 0$$

Donc $\boxed{\beta_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}}$. en particulier la première ligne de A_2 est égale à la première ligne de A_1

I.C.2) a) pour $k = 2$, en posant $F_1 = F(1, -\beta_1)$ définie à la question précédente, on a bien $A_2 = F_1A_1$ est une matrice telle que $\forall i \in [[2, n]], a_{i,1}^2 = 0$ par construction de β_1

Soit $k \in [[2, n]]$. Supposons construites les matrices $F_1, \dots, F_{k-1}, A_1, \dots, A_{k-1}, A_k$ vérifiant pour tous $j \in [[2, k]]$, $A_j = F_{j-1}A_{k-1}$ et A_k est une matrice telle que les coefficients d'indices (i, j) avec $j \in [[1, k-1]]$ et $i \in [[j+1, n]]$ sont nuls et $\forall m \in [[1, n]] D_m(A_k) \neq 0$

On pose alors $F_k = F(k, -\beta_k)$ ou $\beta_k = {}^t(\beta_{k+1,k}, \dots, \beta_{n,k})$ et $A_{k+1} = F_kA_k$

d'après la question IB2) les lignes des A_{k+1} sont $L'_i = L_i$ pour $i \leq k$ et $L'_i = L_i - \beta_{i,k}L_k$ pour $i \geq k+1$

$$\text{Or la matrice } A_k \text{ se présente ainsi } A_k = \begin{pmatrix} a_{1,1}^k & * & & * & * \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & a_{k-1,k-1}^k & & \\ & & \vdots & 0 & a_{k,k}^k & * \\ \vdots & \vdots & & & a_{k+1,k}^k & \\ 0 & 0 & & & a_{n,k}^k & * \end{pmatrix}$$

On doit donc calculer $\beta_k = {}^t(\beta_{k+1,k}, \dots, \beta_{n,k})$ de telle sorte que

$$\forall i \in [[k+1, n]], a_{i,k}^k - \beta_{i,k}a_{k,k}^k = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_{i,k} = \frac{a_{i,k}^k}{a_{k,k}^k}$$

ceci suppose $a_{k,k}^k \neq 0$ ce qui est donné dans l'hypothèses de récurrence puisque

$$D_k(A_k) = \prod_{j=1}^k a_{j,j}^k \neq 0$$

La matrice A_{k+1} est bien de la forme voulue , et de plus d'après la question IB2 b)

$$\forall m \in [[1, n]], D_m(A_{k+1}) = D_m(A_k) \neq 0$$

Ainsi par récurrence finie on aura bien obtenu une suite de matrices $F_1, \dots, F_{n-1}, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$ vérifiant les conditions demandées

I.C.2.b) On remarque au cours de notre construction que les lignes L'_i de A_{k+1} vérifient $L'_i = L_i$ pour $i \leq k$

I.C.2.c) Le nombre de multiplications nécessaires pour passer de A_k à A_{k+1} est donc égal au nombre de multiplications nécessaires pour effectuer les $n - k$ transformations $L'_i = L_i + \beta_{i,k}L_k$ pour $i \geq k + 1$

soit $N_k = (n - k)^2$ multiplications (en tenant compte du fait que les $k + 1$ premiers coefficients de L'_k sont nuls)

I.C.3) a) Posons $P = F_{n-1} \cdot F_{n-2} \cdot \dots \cdot F_1$ on obtient ainsi

$$A_n = F_{n-1}A_{n-1} = F_{n-1}F_{n-2}A_{n-2} = \dots = PA_1$$

par construction la matrice A_n est triangulaire supérieure et d'après la question IB3) la matrice P est triangulaire inférieure inversible, de plus $A_1 = A$ donc on obtient $A = P^{-1}A_n$ d'autre part

$$P^{-1} = (F_{n-1} \cdot F_{n-2} \cdot \dots \cdot F_1)^{-1} = F_1^{-1} \cdot \dots \cdot F_{n-1}^{-1} = F(1, \beta_1) \cdot \dots \cdot F(n-1, \beta_{n-1}) = L$$

cette matrice L est bien triangulaire inférieure. En notant $U = A_n$ qui est triangulaire supérieure, on a bien obtenu la décomposition $A = LU$ demandée.

I.C.3.b) $F(1, \beta_1) \cdot \dots \cdot F(n-1, \beta_{n-1}) = L$ est en fait la matrice P_{n-1} de la question IB3 b) et elle est

$$\text{donc égale à } L = [b_1, \dots, b_{n-1}, e_n] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ \beta_{2,1} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 \\ \beta_{n,1} & & & & \beta_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \text{ avec les notations précédentes.}$$

Ainsi si $i > j$, $l_{i,j} = \beta_{i,j} = \frac{a_{i,j}^j}{a_{j,j}^j}$

de plus puisque $A_n = U$ on a donc pour $i \leq j$, $u_{i,j} = a_{i,j}^n$

I.C.4 supposons l'existence de deux matrices de $\overline{\mathcal{TT}}_n$, inversibles (dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1) L, L' et deux matrices U, U' de \mathcal{TS}_n telles que $A = LU = L'U'$

on peut alors en déduire que U est inversible puisque $\Delta_n(A) = \det(A) \neq 0$

donc $L'^{-1}L = U'U^{-1} \in \overline{\mathcal{TT}}_n \cap \mathcal{TS}_n$ et ses coefficients diagonaux sont égaux à 1

donc $L'^{-1}L = U'U^{-1} = I_n$ ainsi $L = L'$ et $U = U'$

I.C.5)

programme en langage Maple

```
LU:=proc(M)
```

```
A:=M;n:=rowdim(A);
```

```
for k from 1 to n do
```

```
for i from k+1 to n do
```

```
#on détermine les coefficients sous la diagonale qui donneront la matrice L#
```

```
A[i,k]:=A[i,k]/A[k,k];
```

```
for j from k+1 to n do
```

```
#on remplace la ligne L[i] par L[i]-A[i,k]/A[k,k]L[k] pour former la matrice A[k] #
```

```
A[i,j]:=A[i,j]-A[i,k]*A[k,j];
```

```
od;od;od;
```


or

$$l_{n,n-1} \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} = a_n \frac{\delta_{n-2} \delta_{n-1}}{\delta_{n-1} \delta_{n-2}} = a_n$$

$$l_{n,n-1} c_{n-1} + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = a_n c_{n-1} \frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = \frac{a_n c_{n-1} \delta_{n-2} + \delta_n}{\delta_{n-1}} = b_n \text{ (formule obtenue au II B 1)}$$

donc on en déduit que l'égalité $A_n = U_n L_n$ est vraie au rang n . Ainsi par récurrence, la propriété demandée en découle.

II.B.3)

En langage Maple:

```
res:=proc(a,b,c,w);
```

```
n:=nops(b);
```

```
# les variables de la procedure sont les vecteurs a,b,c,et le second membre w , le vecteur a est indexé de 1 à n-1 et non de 2 à n comme dans le texte #
```

```
# calcul des coefficients de L et de U #
```

```
delta[0]:=1;delta[1]:=b[1];
```

```
for i from 2 to n do delta[i]:=b[i]*delta[i-1]-a[i-1]*c[i-1]*delta[i-2];l[i-1]:=a[i-1]*delta[i-2]/delta[i-1];od;
```

```
#Résolution de Lv=w”
```

```
v[1]:=w[1];for i from 2 to n do v[i]:=w[i]-l[i-1]*v[i-1];od;
```

```
#Résolution de Uu=v”
```

```
u[n]:=v[n]*delta[n-1]/delta[n];for i from n-1 to 1 by -1 do u[i]:=(v[i]-c[i]*u[i+1])*delta[i-1]/delta[i];od;end;
```

nombre de multiplications nécessaires: $7n - 10$

nombre de divisions nécessaires: $2n - 2$

nombre d'additions nécessaires: $3n - 5$

II.C.1.a)

$$\langle A_n v, v \rangle = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\langle A_n v, v \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_i v_j = 2 \sum_{i=1}^n v_i^2 - 2 \sum_{i=2}^n v_i v_{i-1}$$

or

$$v_1^2 + v_n^2 + \sum_{i=2}^n (v_i - v_{i-1})^2 = 2 \sum_{i=1}^n v_i^2 - 2 \sum_{i=2}^n v_i v_{i-1}$$

II.C.1.b) On en déduit que $\forall v \in \mathbb{R}^n, \langle A_n v, v \rangle \geq 0$

de plus $\langle A_n v, v \rangle = 0 \Rightarrow v_1^2 = 0, v_n^2 = 0, \text{et } \forall i \in [[2, n]], (v_i - v_{i-1})^2 = 0$

ce qui implique clairement $v = 0$

donc la matrice symétrique A_n est définie positive.

II.C.1.c) Il est clair que pour tout k la matrice $A_k = \Delta_k(A_n)$ est symétrique définie positive , et donc son déterminant (produit des valeurs propres strictements positives) est strictement positif.

Il est donc possible d'appliquer l'algorithme de décomposition LU pour A

II.C.2) On a ici $\delta_0 = 1, \delta_1 = 2$ et $\delta_n = 2\delta_{n-1} - \delta_{n-2}$ équation qui caractérise une suite récurrente

linéaire d'ordre 2 associé à l'équation caractéristique $X^2 - 2X + 1 = 0$ qui admet 1 comme racine double

donc: il existe α, β tels que $\delta_n = \alpha + n\beta$. On trouve $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ et donc $\delta_n = n$
d'où pour $i \in [[2, n]]$, $l_{i,i-1} = \frac{1-i}{i}$ et $u_{i,i} = \frac{i+1}{i}$, $u_{i,i+1} = -1$

II.C.3.a) on obtient $L_n y = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & -\frac{2}{3} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\frac{n-1}{n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$

appliquons la méthode du pivot de Gauss, en effectuant les transformations sur L_n pour la transformer en I_n , et simultanément sur I_n les mêmes transformations on obtient ainsi

$$L_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \\ \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & & \frac{n-1}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

et donc $y_i = 0$ si $i \leq k-1$ et $y_i = \frac{k}{i}$ si $i \geq k$

II.C.3.b) on applique la même méthode (pivot de Gauss) pour calculer U_n^{-1} , mais les opérations vont se faire sur les colonnes

$$U_n x = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{1} & -1 & & \\ & \frac{3}{2} & & \\ & & -1 & \\ & & \frac{n+1}{n} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = U_n^{-1} y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{n+1} \\ & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \\ & & \frac{3}{4} & \\ & & & \frac{n-1}{n} & \frac{n}{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_n \end{pmatrix}$$

soit $x_i = i(\frac{1}{i+1}y_i + \frac{1}{i+2}y_{i+1} + \dots + \frac{1}{n+1}y_n)$

En particulier si $i \geq k$,

$$\begin{aligned} x_i &= i \left(\sum_{j=i}^n \frac{1}{j+1} \frac{k}{j} \right) = ik \sum_{j=i}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) \\ &= ik \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{(n+1-i)k}{n+1} \end{aligned}$$

et si $i < k$

$$x_i = i \left(\sum_{k}^n \frac{1}{j+1} \frac{k}{j} \right) = ik \sum_{j=k}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= ik\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{(n+1-k)i}{n+1}
\end{aligned}$$

II.C.4)

ainsi si $A_n^{-1} = [b_{i,k}]_{1 \leq i,k \leq n}$ le calcul précédent donne la valeur de $A_n^{-1}e_k$, c'est à dire les coefficients $b_{i,k}$

donc $b_{i,k} = \frac{(n+1-i)k}{n+1}$ si $i \geq k$ et $b_{i,k} = \frac{(n+1-k)i}{n+1}$ si $i \leq k$

PARTIE III

III.A.1.a) Remarquons tout d'abord que la matrice $B = {}^tAA$ est symétrique (${}^tB = B$)

$$\|Ax\|^2 = {}^t(Ax)Ax = {}^t x {}^tAAx = {}^t xBx$$

en particulier $\forall x \in \mathbb{R}^n, {}^t xBx \geq 0$ et

$${}^t xBx = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \Rightarrow Ax = 0$$

or A est inversible donc $x = 0$. Ainsi B est définie positive

III.A.1.b) B est donc diagonalisable dans une base orthonormée $(e'_i)_{1 \leq i \leq n}$, avec $Be'_i = \lambda_i(B)e'_i$.

($0 < \lambda_1(B) \leq \dots \leq \lambda_n(B)$)

en particulier si $x \in \mathbb{R}^n, x = \sum_{i=1}^n x_i e'_i$ on a $\|x\|^2 = \sum x_i^2$ et $\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(B)x_i^2$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i(B)x_i^2}{\sum x_i^2}} \leq \sqrt{\lambda_n(B)}$$

l'égalité ayant lieu pour $x = e'_n$

On en déduit que

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sqrt{\lambda_n(B)}$$

III.A.1.c) si A est symétrique réelle (donc diagonalisable), alors $B = A^2$ et donc $\lambda_i(B) = \lambda_i^2(A)$ d'où $\lambda_n(B) = \max(|\lambda_i(A)|)^2 = \rho(A)^2$. On en déduit que $\|A\| = \rho(A)$

III.A.2 posons $A = I_n - H$ on a alors (1) $\Leftrightarrow u = Hu + c$ ($c = w$)

On suppose que $\|H\| < 1$. La suite vectorielle définie par $U_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = HU_n + c$ vérifie pour $n \geq 1$,

$$\|U_{n+1} - U_n\| = \|H(U_n - U_{n-1})\|$$

donc

$$\begin{aligned}
\|U_{n+1} - U_n\| &\leq \|H\| \|U_n - U_{n-1}\| \\
&\leq \|H\|^2 \|U_{n-1} - U_{n-2}\| \\
&\leq \dots \leq \|H\|^n \|U_1 - U_0\|
\end{aligned}$$

Considérons la série de \mathbb{R}^n : $\sum_{k \geq 1} U_{k+1} - U_k$. Cette série est absolument convergente : en effet $\sum_{k \geq 1} \|U_{k+1} - U_k\|$ est convergente puisque $\sum_{k \geq 1} \|H\|^k$ est une série géométrique convergente ($\|H\| < 1$)

or l'espace \mathbb{R}^n étant complet, on en déduit que $\sum_{k \geq 1} U_{k+1} - U_k$ est convergente ceci implique que la suite U_k est convergente. Notons u sa limite.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = HU_n + c$ on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} HU_n + c = Hu + c = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{n+1} = u$$

(la première égalité provient de la continuité de l'application affine $x \rightarrow Hx + c$)

III.A.3.a) M_n est tridiagonale d'ordre n : $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit λ une valeur propre de M_n et x un vecteur propre associé ($x \neq 0$)

on sait que M_n admet n valeurs propres réelles puisqu'elle est symétrique

$$M_n x = \lambda x \Leftrightarrow \forall i \in [[0, n+1]], x_i - \lambda x_{i+1} + x_{i+2} = 0$$

l'équation caractéristique est $X^2 - \lambda X + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = \lambda^2 - 4$

en notant $i_0 \in [[1, n]]$ l'indice tel que $|x_{i_0}| = \max(|x_i|)$ on a donc $x_{i_0-1} - \lambda x_{i_0} + x_{i_0+1} = 0$ donc

$\lambda x_{i_0} = x_{i_0-1} + x_{i_0+1}$ d'où $|\lambda| |x_{i_0}| \leq 2 |x_{i_0}|$ d'où $\lambda \leq 2$

posons $\lambda = 2 \cos \theta$, avec $\theta \in [0, \pi]$, ainsi $\Delta = -4 \sin^2 \theta$ et donc

$$X^2 - \lambda X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = e^{\pm i\theta}$$

la suite x_n , récurrente linéaire d'ordre 2, est donc donnée par la formule

$$x_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta}, x_0 = x_{n+1} = 0$$

on en déduit les équations

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{i(n+1)\theta} + \beta e^{-i(n+1)\theta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha (\neq 0) \\ \sin((n+1)\theta) = 0 \end{cases}$$

donc il existe un entier naturel $k \in [[0, n+1]]$ tel que $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$

et $x_k = 2i\alpha \sin(k\theta)$. Notons que $k \neq 0$ et $k \neq n+1$ sinon $x = 0$

ainsi les n valeurs propres de M_n sont les réels $\lambda_k = 2 \cos(\frac{k\pi}{n+1})$, $\lambda_k \in]-2, 2[$

III.A.3 D'après IIIA1c)

$$\|M_n\| = \rho(M_n) = 2 \cos(\frac{\pi}{n+1}) = 2 - \mu_n \text{ avec } \mu_n = 2 - 2 \cos(\frac{\pi}{n+1}) > 0$$

de plus $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - 2 \cos(\frac{\pi}{n+1}) = 0$

On en déduit donc que les valeurs propres de $A_n = 2I_n - M_n$ sont égales à $2(1 - \cos(\frac{k\pi}{n+1}))$

III.A.3.c) $\mu_n = 2(1 - \cos(\frac{\pi}{n+1})) = 4 \sin^2(\frac{\pi}{2(n+1)}) \sim 4(\frac{\pi}{2(n+1)})^2 \sim \frac{\pi^2}{n^2}$

III.A.4 a) On suppose $\|U_0\| = 1$ et $\|w\| = 1$ pour la suite (7)

si $H = \frac{M_n}{2}$ on a alors

$$(7) \Leftrightarrow u = \frac{M_n}{2} u + c \Leftrightarrow (2I_n - M_n)u = 2c = A_n u = w \frac{1}{2}$$

donc $c = \frac{w}{2}$ et $\|c\| = \frac{1}{2}$

on a alors

$$U_k = H U_{k-1} + c = H(H U_{k-2} + c) + c = H^2 U_{k-2} + H c + c$$

de même

$$U_k = H^3 U_{k-3} + H^2 c + H c + c$$

puis par récurrence simple

$$U_k = H^k U_0 + (H^{k-1} + \dots + I_n) c$$

III.A.4 b) On peut donc écrire puisque $H^k U_0 \rightarrow 0$ que $u = \sum_{k=0}^{+\infty} H^k c$ (série absolument convergente de \mathbb{R}^n) et donc

$$\|U_k - u\| = \left\| \sum_{i=k}^{+\infty} H^i c + H^k U_0 \right\| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=k}^{+\infty} \|H^i\| + \|H^k\|$$

or

$$\|H\| = \frac{1}{2} \|M_n\| = 1 - \frac{\mu_n}{2} \text{ et } \sum_{i=k}^{+\infty} \|H^i\| \leq \sum_{i=k}^{+\infty} (1 - \frac{\mu_n}{2})^i = (1 - \frac{\mu_n}{2})^k \frac{1}{\frac{\mu_n}{2}}$$

donc

$$\|U_k - u\| \leq \frac{1}{\mu_n} (1 - \frac{\mu_n}{2})^k + (1 - \frac{\mu_n}{2})^k = (1 - \frac{\mu_n}{2})^k (1 + \frac{1}{\mu_n})$$

(comment faire intervenir A_n^{-1} ici?)

III.A.4.c) on peut remarquer que A_n^{-1} , qui est également symétrique réelle, admet pour valeurs propres $(2(1 - \cos(\frac{k\pi}{n+1})))^{-1}$ et donc

$$\|A_n^{-1}\| = \rho(A_n^{-1}) = \frac{1}{2(1 - \cos(\frac{\pi}{n+1}))} = \frac{1}{\mu_n}$$

donc $\|A_n^{-1}\| \sim \frac{n^2}{\pi^2}$

III.A.4.d) On veut donc $(1 - \frac{\mu_n}{2})^k (1 + \frac{1}{\mu_n}) \leq 10^{-4}$ soit

$$k \geq \frac{(\ln(10^{-4}) - \ln(1 + \frac{1}{\mu_n}))}{\ln(1 - \frac{\mu_n}{2})}$$

pour obtenir l'approximation demandée, il suffit donc d'itérer $\frac{(\ln(10^{-4}) - \ln(1 + \frac{1}{\mu_n}))}{\ln(1 - \frac{\mu_n}{2})}$ fois

chaque itération nécessite $2n$ multiplications donc il faudra en tout $2n \frac{(\ln(10^{-4}) - \ln(1 + \frac{1}{\mu_n}))}{\ln(1 - \frac{\mu_n}{2})}$ multiplications.

si l'on suppose maintenant que $n \rightarrow \infty$, on en déduit que

$$2n \frac{(\ln(10^{-4}) - \ln(1 + \frac{1}{\mu_n}))}{\ln(1 - \frac{\mu_n}{2})} \sim 2n \frac{\ln(\frac{1}{\mu_n})}{(-\frac{\mu_n}{2})} \sim \frac{8n^3 \ln n}{\pi^2}$$

si l'on compare avec les résultats du IIA2) on avait obtenu $n^3/3$

il est donc préférable d'utiliser la méthode LU

(les réponses à cette question III A 4) ne sont pas garanties)