

I. Généralités.

1) Pour $x > 1$ la série définissant F converge absolument, pour $0 < x \leq 1$ elle converge par le critère spécial des séries alternées et enfin pour $x \leq 0$ elle diverge grossièrement. Le domaine de définition de F est donc $]0, +\infty[$. $\square$

2) $g_n(t) = \frac{1 + (-1)^n t^{n+1}}{1+t}$ pour $t \neq -1$. Donc sur $[0, 1[$ la suite (g_n) converge simplement vers $g : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et est dominée par la fonction constante égale à 2 intégrable sur $[0, 1[$. Le théorème de la convergence dominée permet donc d'affirmer que $\int_0^1 g_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t}$ i.e. $F(1) = \ln 2$. $\square$

3) Notons $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. Pour $x \geq 2$ il vient que $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$. Ainsi $\sum f_n(x)$ converge normalement sur $[2, +\infty[$ et le théorème du double passage à la limite permet d'affirmer (puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ pour $n \geq 2$) que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. $\square$

4)

a) En notant $\varphi(t) = \frac{\ln t}{t^x}$ pour $t > 0$ (avec $x > 0$ fixé), il vient que $\varphi'(t) = \frac{t^{x-1}(1-x \ln t)}{t^{2x}}$ donc φ est décroissante pour $t \geq e^{1/x}$. La suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ est donc asymptotiquement décroissante. $\square$

b) Pour prouver que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et en outre dérivable terme à terme, il suffit de prouver que :

(1) : les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

(2) : la série $\sum f_n(t)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$

(3) : la série $\sum f'_n(x)$ converge localement uniformément sur $]0, +\infty[$.

Or (1) est clair et (2) a été établi en la question 1).

Par ailleurs $f'_n(x) = (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}$. Soit alors $a > 0$.

Pour $x \geq a$ et $n \geq e^{1/a}$ la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)$ décroît (vers 0 par croissances comparées) compte-tenu de la question précédente. Donc la série $\sum f'_n(x)$ relève du théorème spécial pour $x \geq a$ et $n \geq e^{1/a}$.

Ainsi : $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} f'_k(x) \right| \leq |f'_{n+1}(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} = \varepsilon_n \quad \forall x \geq a \quad \forall n \geq e^{1/a}$.

Ce qui prouve que la série $\sum f'_n(x)$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. donc (3) est bien satisfaite.

Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}$ $\square$

5) Soit $x > 1$ fixé. Comme les séries $\sum \frac{1}{(2n)^x}$ et $\sum \frac{1}{(2n+1)^x}$ convergent, on peut écrire :

$$F(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^x} \text{ et } \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^x} \text{ donc :}$$

$$F(x) - \zeta(x) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^x} = -2^{1-x} \zeta(x) \text{ soit } F(x) = (1 - 2^{1-x}) \zeta(x) \quad \forall x > 1. \quad \square$$

D'où $\zeta(x) \sim F(x)$ au voisinage de $+\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$. $\square$

Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même.

6)

a) Pour $x > 1$ la série définissant $F(x)$ converge absolument donc son produit de Cauchy par elle-même converge absolument vers $F(x)^2$. $\square$

b) Il vient $c_n(x) = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(-1)^{p-1}}{p^x} \times \frac{(-1)^{n-p-1}}{(n-p)^x} = (-1)^n \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{(p(n-p))^x}$. Or $p(n-p) \leq \frac{n^2}{4}$ pour $1 \leq p \leq n-1$.

Donc $|c_n(x)| \geq (n-1) \frac{4^x}{n^{2x}} = a_n$. $\square$

Or $a_n \sim \frac{4^x}{n^{2x-1}}$ ne tend pas vers 0 (pour x fixé et $n \rightarrow +\infty$) si $0 < x \leq \frac{1}{2}$.

Donc dans ce cas $\sum c_n(x)$ diverge grossièrement. $\square$

7)

$$a) \frac{1}{X(n-X)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{n-X} \right).$$

$$\text{Donc } c_n(1) = (-1)^n \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p(n-p)} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n-p} \right) = 2(-1)^n \frac{H_{n-1}}{n} \quad \square$$

b) En écrivant que $H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}$ il vient immédiatement que $\frac{H_{n-1}}{n} - \frac{H_n}{n+1} = \frac{H_{n-1} - 1}{n(n+1)}$ et ainsi la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n} \right)$ est-elle décroissante. $\square$

c) Comme en outre $\frac{H_{n-1}}{n} \sim \frac{\ln n}{n}$ tend vers 0, la série $\sum c_n(1)$ converge par critère spécial aux séries alternées. $\square$

On peut facilement montrer qu'elle converge bien vers le produit des sommes i.e. $(\ln 2)^2$. Cf annexe 1 à la fin.

Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de zeta au voisinage de 1.

8)

a) Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, elle est en particulier dérivable en 1 et admet donc en 1 un développement limité qui est le développement de Young : $F(1+h) = \ln 2 + F'(1)h + o(h)$ $\square$

$$\text{En notant } g(x) = 1 - 2^{1-x} \text{ il vient } g(1+h) = 1 - 2^{-h} = 1 - e^{-\ln 2 \times h} = (\ln 2)h - \frac{(\ln 2)^2}{2}h^2 + o(h^2) \quad \square$$

b) Pour $x > 1$ on a (question 5) $\zeta(x) = F(x)/g(x)$ et ainsi pour $h > 0$:

$$\zeta(1+h) = \frac{1}{(\ln 2)h} \times \frac{\ln 2 + F'(1)h + o(h)}{1 - \frac{\ln 2}{2}h + o(h)} = \frac{1}{(\ln 2)h} \left(\ln 2 + F'(1)h + o(h) \right) \left(1 + \frac{\ln 2}{2}h + o(h) \right) \text{ donc}$$

$$\zeta(1+h) = \frac{1}{h} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} \right) + o(1) \quad \square$$

9)

a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ étant décroissante sur $[n, n+1]$ (car $x > 0$) il vient $\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$ d'où l'inégalité proposée valable pour tout $x > 0$. $\square$

b) Il en découle que $\sum_{k=1}^n v_k(x) \leq 1 - \frac{1}{(n+1)^x} \leq 1$ pour tout $n \geq 1$ et tout réel $x > 0$. Ainsi la série $\sum v_n(x)$ converge pour tout réel $x > 0$ en tant que série à termes positifs et à sommes partielles bornées. $\square$

$$\text{En particulier } \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n v_k(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = \gamma.$$

c) Pour tout $x > 0$ on a $\sum_{k=1}^n v_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x}$. Si en outre $x > 1$ les deux termes du membre de droite convergent et ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$. $\square$

d) Soit $a > 0$ fixé. Pour $x \geq a$ il vient $0 \leq \sum_{k=n+1}^N v_k(x) \leq \frac{1}{(n+1)^x} - \frac{1}{(N+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^a}$.

En faisant tendre N vers $+\infty$ (licite vu la convergence de la série) il vient que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x) \leq \frac{1}{(n+1)^a}$ ce qui établit la convergence uniforme de la série $\sum v_n(x)$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. $\square$

e) Pour $n \geq 1$ fixé, la fonction $x \mapsto \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant qu'intégrale propre à paramètre car $(t, x) \mapsto \frac{1}{t^x}$ est continue sur $[n, n+1] \times]0, +\infty[$. Il en découle que v_n est continue sur $]0, +\infty[$.

Par théorème de récupération uniforme de la continuité, il vient alors que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$

et en particulier en 1^+ . Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1+h) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) + o(1) = \gamma + o(1)$ et la question c) prouve alors que

$$\zeta(1+h) = \frac{1}{h} + \gamma + o(1) \quad \square$$

10) De l'unicité du développement limité en 1^+ de la fonction ζ , on tire alors $\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} = \gamma$.

Or $F'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ car on a démontré précédemment que F était dérivable terme à terme sur $]0, +\infty[$ donc en particulier en 1. Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n} = -\ln 2 \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2} \right)$. $\square$

Calcul des $F(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli.

Voir démonstration de l'existence et de l'unicité de la suite des polynômes de Bernoulli en annexe 2.

11) Il vient immédiatement $B_1 = X - \frac{1}{2}$ et $B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$ donc $b_1 = -\frac{1}{2}$ et $b_2 = \frac{1}{6}$. $\square$

12) Pour $n \geq 2$ on a $B_n(1) - B_n(0) = 0$ puisque $\int_0^1 B_{n-1}(t) dt = 0$ car $n-1 \geq 1$. $\square$

13) On vérifie immédiatement que la suite (C_n) définie par $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ vérifie les conditions de la suite de Bernoulli donc $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ par unicité de la suite de Bernoulli. $\square$

14)• Comme g_k est 2π périodique, il vient pour $x \in [-2\pi, 0[$ que $g_k(-x) = g_k(2\pi - x) = B_{2k}(1 - \frac{x}{2\pi})$ car

$2\pi - x \in [0, 2\pi[$. Compte-tenu de la question précédente on a donc $g_k(-x) = B_{2k}(\frac{x}{2\pi}) = g_k(x)$.

Comme g_k est 2π périodique et que sa restriction à $[-2\pi, 2\pi[$ est paire, g_k est paire.

• En outre g_k est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est périodique de période 2π , que sa restriction à $[0, 2\pi[$ est continue (fonction polynomiale) et que $\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} g_k(x) = \lim_{t \rightarrow 1^-} B_{2k}(t) = B_{2k}(1) = B_{2k}(0) = g_k(0) = g_k(2\pi)$ (a priori pour $k \geq 1$ car alors $2k \geq 2$ mais également vrai pour $k=0$ car $g_0 = B_0 = 1$).

• En outre g_k est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Il en découle que g_k est égale à la somme de sa série de Fourier (de cosinus) et qu'en outre cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$. L'existence est ainsi prouvée. Quant à l'unicité (d'ailleurs totalement inutile pour la suite), elle dépasse le cadre du programme. $\square$

15)

a) Il vient par changement de variable $a_n(k) = 2 \int_0^1 B_{2k}(t) \cos(2\pi nt) dt$ (1).

Pour $k \geq 1$ (pour dérivation de B_{2k}) et $n \geq 1$ (pour primitivation de $\cos(2\pi nt)$) il vient par parties :

$$a_n(k) = -\frac{2k}{n\pi} \int_0^1 B_{2k-1}(t) \sin(2\pi nt) dt.$$

En réintégrant par parties en dérivant à nouveau B_{2k-1} (on a bien $2k-1 \geq 1$) on obtient le résultat de l'énoncé. $\square$

b) Par ailleurs $a_n(0) = 0$ d'après (1) ci-dessus (car $B_0 = 1$) et $B_1(1) = -B_1(0) = -\frac{1}{2}$ donc $a_n(1) = \frac{1}{(\pi n)^2}$. $\square$

c) Pour $k \geq 2$ on a $a_n(k) = -\frac{(2k)(2k-1)}{(2\pi n)^2} a_n(k-1)$ d'après a) car $2k-1 \geq 3 \geq 2$ donc $B_{2k-1}(1) = B_{2k-1}(0)$.

Par une itération claire, compte-tenu de la valeur de $a_n(1)$ ci-dessus, on obtient $a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} (\pi n)^{2k}}$ $\square$

On constate que cette formule est encore vraie pour $k=1$.

16) Pour $k \geq 1$ on a $a_0(k) = 2 \int_0^1 B_{2k}(t) dt = 0$ donc :

$$b_{2k} = B_{2k}(0) = g_k(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} (\pi)^{2k}} \times \zeta(2k) \text{ soit encore } \zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} \times (-1)^{k-1} b_{2k} \times \pi^{2k}. \quad \square$$

17)

a) Par une récurrence immédiate il vient que B_n est de degré n et la formule de Taylor pour les polynômes fournit

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k. \text{ Or par une récurrence immédiate il vient que } B_n^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)B_{n-k} \text{ donc}$$

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^n C_n^k b_{n-k} X^k \quad \square$$

b) En particulier pour $n \geq 2$ on a $b_n = B_n(1) = b_n + \sum_{k=1}^n C_n^k b_{n-k}$ donc $\sum_{k=1}^n C_n^k b_{n-k} = 0$.

$$\text{Ainsi } b_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n C_n^k b_{n-k} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k b_k$$

La suite (b_n) est donc définie par $b_0 = 1$ et pour $n \geq 1$: $b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k b_k$. $\square$

Algorithme : on commence par créer un tableau B de n réels initialement rempli par des zéros qui contiendra à la fin le tableau $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ qui sera renvoyé par l'algorithme.

Le calcul des b_k se fait à l'aide d'une boucle "for". Chaque étape de cette boucle comporte elle-même une boucle "for" pour le calcul de la somme. À noter l'utilisation de la variable **binom** pour éviter la répétition de calculs déjà effectués.

Programme Maple :

```
bern := proc (n)
  local B,b,binom,i,j:
  B := 0; for i from 1 to n-1 do B := B,0 od: B := [B]:
  for i from 1 to n do
    b := 1: binom := 1:
    for j from 1 to i-1 do
      binom := binom*(i+1-j+1)/j:
      b := b+B[j]*binom
    od:
    B[i] := -b/(i+1)
  od:
  B
end:

bern(20);
[-1/2, 1/6, 0, -1/30, 0, 1/42, 0, -1/30, 0, 5/66, 0, -691/2730,
 0, 7/6, 0, -3617/510, 0, 43867/798, 0, -174611/330]
```

Programme Caml L'indexation des tableaux commençant à 0, b_k est codé dans la case d'indice $k-1$ du tableau B.

```
let bern n =
  let B = make_vect n 0. in
  for i = 1 to n do
    let b = ref 1. and binom = ref 1 in
    for j = 1 to i-1 do
      binom := (!binom * (i+2-j)) / j;
      b := !b +. (B.(j-1) *. float_of_int !binom)
    done;
    B.(i-1) <- -.(!b) /. float_of_int (i+1)
  done;
  B
;;
bern : int -> float vect = <fun>
```

Ce programme fournit $b_{20} = -529.124242424$ et on vérifie bien avec Maple que :

```
evalf(-174611/330);
-529.1242424
```

$$\textbf{Annexe 1 : } \sum_{n=2}^{+\infty} c_n(1) = (\ln 2)^2.$$

Pour $x \in]-1, 1[$, la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge absolument vers $\ln(1+x)$ car son rayon de convergence

est 1. Donc par produit de Cauchy on a en particulier $\ln^2(1+x) = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n(1)x^n$ pour $x \in [0, 1[$.

Comme la série $\sum c_n(1)$ converge (question 7) on peut envisager la fonction S définie sur $[0, 1]$ par :

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n(1)x^n.$$

Comme la suite $(c_n(1))$ est alternée de valeur absolue décroissante vers 0 (Cf question 7), la série précédente relève du théorème spécial pour tout $x \in [0, 1]$.

Ainsi son reste d'ordre n vérifie $|R_n(x)| \leq |c_{n+1}(1)|x^{n+1} \leq |c_{n+1}(1)| \quad \forall x \in [0, 1]$

ce qui prouve la convergence uniforme de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} c_n(1)x^n$ sur $[0, 1]$.

Ainsi S est une fonction continue sur $[0, 1]$ et en particulier en 1 donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(1) = S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln^2(1+x) = (\ln 2)^2 \quad \square$$

Annexe 2 : Existence et unicité de la suite des polynômes de Bernoulli

Soit le prédicat $\mathcal{P}_n$: « Il existe une unique famille $(B_0, B_1, \dots, B_n)$ de polynômes telle que $B_0 = 1$ et pour k de 1 à

n : $B'_n = nB_{n-1}$ et $\int_0^1 B_n = 0$ »

$\mathcal{P}_0$ est vrai. Supposons $\mathcal{P}_n$ vrai.

- Soit $(Q_0, \dots, Q_{n+1})$ une suite satisfaisant $\mathcal{P}_{n+1}$. Alors la suite $(Q_0, \dots, Q_n)$ satisfait $\mathcal{P}_n$ donc $Q_k = B_k$ pour $k \leq n$. En outre $Q'_{n+1} = (n+1)Q_n = (n+1)B_n$ détermine Q_{n+1} à une constante additive près et cette constante est déterminée par $\int_0^1 Q_{n+1} = 0$. D'où l'unicité de la suite $(Q_0, \dots, Q_{n+1})$ si elle existe.

- Soit la suite $(B_0, B_1, \dots, B_n, Q_{n+1})$ avec $Q_{n+1}(x) = \int_0^x (n+1)B_n(t) dt + \lambda = P_{n+1}(x) + \lambda$ où λ est défini par

$\lambda = - \int_0^1 P_{n+1}(t) dt$. Alors cette suite vérifie $\mathcal{P}_{n+1}$.

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vrai et l'existence et l'unicité de la suite (B_n) est établie. $\square$

_____ FIN _____