CCP 2008. Filière MP. Mathématiques 2.

Corrigé pour serveur UPS de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

EXEMPLES.

1) En remplaçant dans le déterminant caractéristique la première colonne par elle-même plus la seconde on voit que $X-2$ se met en facteur. On se ramène alors en remplaçant la première ligne par elle-même moins la seconde à un déterminant d'ordre 2 dont les racines sont 1 et $2-\alpha$. Ainsi $\chi_{M(\alpha)} = (X-1)(X-2)(X-2+\alpha)$ et $M(\alpha)$ est bien une **MDP**. □

Si α est différent de 0 et de 1, les trois valeurs propres sont deux à deux distinctes dont $M(\alpha)$ est diagonalisable.
Si $\alpha = 0$ on constate que le sous-espace propre associé à 2 est le plan $x+y=0$ donc $M(0)$ est encore diagonalisable.
Si $\alpha = 1$ il vient que le sous-espace propre associé à 1 est la droite dirigée par $(1,-1,-1)$ donc $M(1)$ n'est pas diagonalisable.

Ainsi $M(\alpha)$ est diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq 1$. □

2) Si A est était à diagonale propre, elle vérifierait $A^3 = 0$ d'après le théorème de Caylay-Hamilton. Or $A^3(\overrightarrow{e}_1) = -\overrightarrow{e}_3$. Donc A n'est pas à diagonale propre. □

3) Le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est $X^2-(a+d)X+ad-bc$. Il admet a et d comme racines si et seulement si $bc=0$ soit si seulement si la matrice st triangulaire. □

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \overline{\mathcal{E}_2}$. D'après la caractérisation séquentielle de l'adhérence, il existe une suite de matrices $A_n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$ qui converge vers A en particulier pour la norme infinie transférée de $\mathbb{R}^4$ puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$ et $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$. Donc $bc = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$. Ce qui prouve que A est à diagonale propre donc que $\mathcal{E}_2$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. □

TEST DANS LE CAS $n = 3$

4) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à diagonale propre soit inversible est naturellement que 0 ne soit pas valeur propre donc ne figure pas sur la diagonale. □

Une matrice triangulaire supérieure T inversible (donc sans 0 sur la diagonale) est évidemment à diagonale propre et son inverse également puisque son inverse classiquement est également triangulaire supérieure (avec sur sa diagonale les inverses des éléments diagonaux de T). □

5) En écrivant que $\mathrm{Det}(X\mathrm{Id} - A) = (X-a_{11})(X-a_{22})(X-a_{33})$ on obtient immédiatement la condition cherchée. □

6)

a) $\Big(\mathrm{Det}(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\Big) \wedge \Big(a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0\Big)$ □

b) Traduction maple :

```
MDP := proc(A)
 det(A)=A[1,1]*A[2,2]*A[3,3]
 and A[1,2]*A[2,1]+A[1,3]*A[3,1]+A[2,3]*A[3,2]=0
end:
```

Les matrices proposées sont toutes à diagonales propres sauf A_2 et A_7. □

c) Cette question me laisse très perplexe !
Au vu des exemples proposés précédemment, on pourrait penser à la condition de nullité de 3 produits. En effet parmi les matrices MDP inversibles de l'exemple précédent, seules les matrices A_1 et A_4 ont une matrice inverse à diagonale propre. On peut voir que cette condition est suffisante (Cf annexe en fin de corrigé).

Mais cette condition n'est en rien nécessaire. En effet par exemple la matrice
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est bien à diagonale propre comme son inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut alors penser à la condition de nullité d'un des trois produits. Mais cette condition n'est en rien suffisante comme le prouve l'exemple de la matrice A_3 inversible à diagonale proprre et qui vérifie cette condition mais dont l'inverse n'est pas à diagonale propre !

EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS.

7) En notant r et s les ordres des matrices carrées A et C, il vient par produit par blocs (bien licite vu les dimensions) $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & Is \end{pmatrix}$. Or, par développement suivant les r premières lignes, il vient que Det $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \mathrm{Det}(C)$ et de même, en développant suivant les dernières lignes , Det $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & Is \end{pmatrix} = \mathrm{Det}(A)$.
D'où le résultat. $\square$

8)

a) Avec les notations précédentes, la question précédente prouve en envisageant le déterminant caractéristique de M que $\chi_M = \chi_A \chi_C$ donc, si A et C sont **MDP**, il en va de même de M.
En bordant la matrice A_5 de l'exemple de la question 6) par la matrice B colonne constituée de trois réels non nuls et par la matrice carrée C d'ordre 1 égale à 1 par exemple, on obtient bien une matrice **MDP** ayant 13 coefficients non nuls. $\square$

b) Compte-tenu de ce qui précède la matrice B ne joue aucun rôle ici. Il suffit donc de choisir par exemple la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Ensuite $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ conviennent si aucun de leurs coefficients n'est nul et si χ_A admet α et δ pour racines et χ_B admet a et d comme racines car $\chi_M = \chi_A \chi_C$.

Ce qui se traduit (somme et produit des racines) par $\begin{cases} abcd\alpha\beta\gamma\delta \neq 0 \\ \alpha + \delta = a + d \\ \alpha\delta = ad - bc \\ ad = \alpha\delta - \beta\gamma \end{cases}$.

En choisissant par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ il vient que $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ convient. $\square$

QUELQUES PROPRIÉTÉS.

9) Si $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ (valeurs propres comptées multiplicativement) celui de $aA + BI_n$ est $(a\lambda_1 + b, a\lambda_2 + b, \ldots, a\lambda_n + b)$ donc si A est **MDP** il en va de même de $aA + BI_n$.
Par ailleurs si A est **MDP** il en va évidemment de même de ${}^tA$ (même spectre).
Ainsi si A est **MDP** il en va de même de $aA + BI_n$ et de $a{}^tA + bI_n$. $\square$

10) Soit $A \in \mathcal{E}_n$. Pour k assez grand ($k \geqslant K_0$), $a_{ii} + \dfrac{1}{k} \neq 0$ pour tout i de 1 à n. Alors la suite $(A_k)_{k \geqslant K_0}$ avec $A_k = A + \dfrac{1}{k} I_n$ est une suite de matrices **MDP** compte-tenu de la question précédentes, inversibles car aucun terme diagonal nul, et qui converge vers A. $\square$

11)

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable (de rang 1 donc 0 est valeur propre et par invariance de la trace $\mathrm{Sp}(A) = (0, 2)$) donc a fortiori trigonalisable mais n'est pas **MDP**. $\square$

b) Une matrice **MDP** est à polynôme caractéristique scindé donc est trigonalisable. $\square$

c) Une matrice trigonalisable est semblable à une matrice triangulaire donc à une matrice à diagonale propre. La réciproque est établie ci-dessus. Donc une matrice est semblable à une matrice **MDP** si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. $\square$

12) Il suffit de noter que toute matrice est la somme d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure. $\square$

Il en découle que $\mathcal{E}_n$ n'est pas un espace vectoriel puisqu'il existe (dès que $n \geqslant 2$) des matrices non à diagonale propre. $\square$

MATRICES SYMÉTRIQUES ET MATRICES ANTISYMÉTRIQUES.

13) Notant $A=(a_{ij})$ et ${}^tA=(b_{ij})$ il vient que $\operatorname{tr}({}^tAA)=\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}a_{ji}\Big)=\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ji}^2\Big)=\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2\Big)$. $\square$

14)

a) Soit A une matrice symétrique réelle donc (ortho-)diagonalisable de spectre $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$.
Alors A est semblable à $D=\operatorname{Diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ donc A^2 est semblable à D^2 et par invariance de la trace il vient que $\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2\Big)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_1^2$. $\square$

b) Il en découle immédédiatement que l'ensemble des matrices symétriques à diagonale propre est l'ensemble des matrices diagonales. $\square$

15)

a) Si A est antisymérique à diagonale propre alors son spectre est réduit à 0 donc son polynôme caractéristique est X^n donc $A^n=0$ par le théorème de Cayley-Hamilton. $\square$

Alors $({}^tAA)^n=(-A^2)^n=(-1)^nA^{2n}=0$. $\square$

b) $B={}^tAA$ est diagonalisable en tant que matrice symétrique réelle. Comme $B^n=0$ toutes ses valeurs propres sont nulles. Donc B est semblable à la matrice nulle donc est nulle. $\square$

c) Comme B est nulle, sa trace est nulle. Or $\operatorname{tr}(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2\Big)$ donc A est nulle.

Ainsi la seule matrice antisymétrique à diagonale propre est la matrice nulle. $\square$

DIMENSION MAXIMALE D'UN ESPACE VECTOTRIEL INCLUS DANS $\mathcal{E}_n$.

16) $\dim \mathcal{A}_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$. $\square$

17) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension p inclus dans $\mathcal{E}_n$. D'après la question 16), on a $F\cap\mathcal{A}_n=\{0\}$ donc $\dim\,(F+\mathcal{A}_n)=p+\dfrac{n(n-1}{2}$. D'où naturellement $p+\dfrac{n(n-1}{2}\leqslant n$ c'est à dire $p\leqslant\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Par ailleurs l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ inclus dans $\mathcal{E}_n$.
Ainsi la dimension maximale recherchée est-elle $\dfrac{n(n+1)}{2}$. $\square$

18) Soit l'ensemble F des matrices M de la forme $\begin{pmatrix}a & B\\ 0 & T\end{pmatrix}$ avec a réel, $B\in\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et T triangulaire inférieure d'ordre $n-1$. C'est clairement un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $1+(n-1)+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
En outre comme (a) et T sont **MDP**, il résulte de la partie III que M est **MDP**. Cela fournit donc un exemple demandé. $\square$

Annexe.

On se propose de montrer ici que si $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant $\begin{cases}\det A=a_{11}a_{22}a_{33}\neq 0\\ a_{12}a_{21}=a_{13}a_{31}=a_{23}a_{32}=0\end{cases}$ alors l'inverse de A est également à diagonale propre.

- Si A est triangulaire on sait que cela est vrai (Cf question 4).
- Examinons le seul cas non trivial d'une matrice **MDP** de la forme $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & a & b\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & c & \lambda_3\end{pmatrix}$ (Les autres cas s'étudiant de manière similaire).
On dira qu'une matrice de cette forme est de type 1. On constate immédiatement que le produit de deux matrices de type 1 est encore de type 1 avec sur la diagonale le produit des termes diagonaux correspondants.
Ainsi lorsque A est inversible son inverse qui est un polynôme de degré 2 de A (conséquence de Cayley-Hamilton) est également une matrice de type 1. Elle vérifie donc bien la seconde condition de la question 5).
En outre comme elle est de type 1, son déterminant est bien égal au produit de ses termes diagonaux (développement suivant la première colonne).
Ce qui prouve bien que A^{-1} est une matrice **MDP**. $\square$

FIN