CCP 2009. Option MP. Mathématiques 1.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

EXERCICE 1

1) Sur $I_1 =]-1,0[$ ou sur $I_2 =]0,1[$ l'équation se normalise en $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^4}}$ et comme les deux fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \longmapsto \dfrac{2}{\sqrt{1-x^4}}$ y sont continues, les solutions de (E) sont définies sur I_i et y forment une droite affine.

En remarquant que l'équation s'écrit $(xy)' = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ on obtient immédiatement (par changement de variable admissible $u = x^2$ dans le calcul de la primitive) $xy = \arcsin(x^2) + \lambda$.

Donc la solution générale de (E) sur I_i est $\dfrac{\arcsin(x^2)+\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ $\square$

2) Une fonction y est solution de (E) sur $I =]-1,1[$ si et seulement sa restriction y_i à I_i est solution sur I_i et si y_1 et y_2 admettent un $\mathcal{C}^1$-raccordement en 0.

Une éventuelle solution est donc de la forme $y(x) = \dfrac{\arcsin(x^2)+\lambda_i}{x}$ pour $x \in I_i$.

Or $\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = \infty$ si $\lambda_1 \neq 0$ et cette limite vaut 0 si $\lambda_1 = 0$ car $\arcsin(x^2) \sim x^2$ au voisinage de 0.

Idem pour $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x)$. Ainsi il y a $\mathcal{C}^0$-raccordement si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ de sorte que la seule solution éventuelle sur I est la fonction z définie par $z(x) = \dfrac{\arcsin(x^2)}{x}$ pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$ et par $z(0) = 0$.

Or $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} z'(x) = \lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} \dfrac{2}{\sqrt{1-x^4}} - \dfrac{\arcsin(x^2)}{x^2} = 2 - 1 = 1$ et le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ prouve que z admet bien un $\mathcal{C}^1$-raccordement en 0 donc est solution de (E) sur I tout entier.

Ainsi (E) admet une et une seule solution sur $I : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x^2)}{x}$ $\square$

EXERCICE 2

1) La fonction $h : t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$ et au voisinage de $+\infty$ on a $h(t) = o(\dfrac{1}{t^2})$ ce qui prouve l'intégrablité au voisinage de $+\infty$ donc sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

2.a) • En tant que fonction de la borne supérieure de l'intégrale d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $f('x) = e^{-x^2}$. $\square$

• La fonction $(x,t) \longmapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times [0,1]$ donc par théorème de dérivation d'une intégrale <u>propre</u> à paramètre, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $g(x) = -2x\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}\,t$ $\square$

2.b) Pour $x \neq 0$, le changement admissible $u = xt$ prouve que $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}\,u = \int_0^1 xe^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}\,t$. Cette égalité est encore vraie en 0 donc finalement sur $\mathbb{R}^+$.

Il en découle alors, compte tenu de la question précédente, que $\varphi'(x) = g'(x) + 2f'(x)f(x) = \displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}\,t = 0$ pour $x \in \mathbb{R}^+$. Ainsi la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}^+$. Or $g(0) = \dfrac{\pi}{4}$ et $f(0) = 0$.

Donc la fonction $g + f^2$ est constante de valeur $\dfrac{\pi}{4}$ sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

2.c) Soit $x \geqslant 0$ fixé quelconque. Pour tout $t \in [0,1]$ on a $0 \leqslant \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant e^{-x^2(1+t^2)} \leqslant e^{-x^2}$ donc par positivité de l'intégration : $0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x^2}$ pour tout $x \geqslant 0$. $\square$

2.d) Compte-tenu de ce qui précède : $f^2(x) = \varphi(x) - g(x) = \dfrac{\pi}{4} - g(x)$ pour tout $x \geqslant 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x) = \dfrac{\pi}{4}$ d'où (car f positive) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ en d'autres termes $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\square$

PROBLÈME : THÉORÈME DU POINT FIXE ET APPLICATIONS.

Partie I : Le théorème du point fixe de Picard.

1) *Démonstration du théorème*.

(a) Comme f est k-contractante, il vient par définition même que $\|u_{n+1}\| \leqslant k\|u_n\|$ d'où par itération immédiate $\|u_n\| \leqslant k^n\|u_0\| = k^n\|f(a)-a\|$.
Ainsi la série $\sum u_n$ converge absolument par principe de comparaison des séries à termes positifs (ici à la série géométrique). Comme l'espace est complet, cela entraîne la convergence de la série elle-même. $\square$

(b) Notons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_n$ et $S = \sum\limits_{k=1}^{n} u_n$ qui existe bien vu la question précédente. Il vient par télescopage $S_n = x_{n+1} - a$.
Or $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ donc $x_n = S_{n-1} + a \xrightarrow[n\to+\infty]{} S + a$. Ainsi la suite (x_n) est-elle bien convergente. $\square$

(c) Comme f est continue sur E (car lipschitzienne) donc en particulier en ℓ, il vient que $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$ par caractérisation séquentielle de la continuité. Or $f(x_n) = x_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. $\square$

(d) Supposons qu'il existe un autre point fixe ℓ'. Alors $\|\ell - \ell'\| = \|f(\ell) - f(\ell')\| \leqslant k\|\ell - \ell'\|$ donc $1 \leqslant k$ (car $\ell \neq \ell'$). Contradiction. $\square$

Exemples et contre-exemples.

2) *Sur la nécessité d'avoir une contraction stricte.*

(a) $g'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t^2} \in]0,1[$ pour tout réel t.
Si x et y sont deux réels quelconques, l'égalité des accroissements finis numériques (applicable car g est bien continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$) prouve l'existence d'un réel c compris entre x et y tel que $g(x)-g(y) = g'(c)(x-y)$ d'où l'inégalité demandée. $\square$

(b) S'il existait un point fixe ℓ pour g on aurait $\arctan \ell = \dfrac{\pi}{2}$ ce qui est impossible. $\square$
Donc g n'est pas une contraction stricte sinon le théorème du point fixe s'appliquerait (sur $\mathbb{R}$ bien complet). $\square$
On peut d'ailleurs le vérifier par un calcul direct :
Supposons que g soit contractante de rapport $k < 1$. Soient alors $\alpha \in]k,1[$ et $c > 0$ tel que $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} \geqslant \alpha$ pour tout $x \geqslant c$ (bien possible car $\alpha < 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 1$).
Il vient alors pour tout $h > 0$: $\Delta(h) = \dfrac{|g(c+h) - g(c)|}{|h|} \leqslant k$ donc $|g'(c)| = \lim\limits_{h\to 0^+} \Delta(h) \leqslant k$.
Contradiction puisque $g'(c) \geqslant \alpha > k$. $\square$

3) *Un exemple.*

(a) La fonction g est contractante (rapport $\dfrac{1}{5}$) sur $\mathbb{R}$ (complet) et y admet donc un unique point fixe ℓ limite de toute suite itérée par g. Or un calcul immédiat fournit $\ell = \dfrac{5}{4}$. Toute suite itérée par g converge donc vers $\dfrac{5}{4}$. $\square$

(b) Soit x un réel quelconque fixé. On a $f\big(g(t)\big) = f(t)$ pour tout réel t par hypothèse. En particulier avec $t = g(x)$ il vient $f\Big(g\big(g(x)\big)\Big) = f\big(g(x)\big) = f(x)$. Par itération claire $f\big(g^n(x)\big) = f(x)$ pour tout entier n. $\square$

(c) Or d'après (a) il vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} g^n(x) = \dfrac{5}{4}$ pour tout réel x.
Soit alors x un réel fixé quelconque. De l'égalité $f\big(g^n(x)\big) = f(x)$ pour tout entier n, on tire par passage à la limite (puisque f est continue) $f(\dfrac{5}{4}) = f(x)$. $\square$

4) *Un système non linéaire dans* $\mathbb{R}^2$

(a) Toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie, sont équivalentes et définissent donc la même topologie qui en fait un espace complet. $\square$

(b) Inégalités immédiates par l'inégalité des accroissements finis. $\square$

(c) Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^2$. Il vient :

$$\begin{aligned}\|\psi(x_2,y_2)-\psi(x_1,y_1)\|_1 &= \frac{1}{4}|\sin(x_2+y_2)-\sin(x_1+y_1)|+\frac{2}{3}|\arctan(x_2-y_2)-\arctan(x_1-y_1)|\\ &\leqslant \frac{1}{4}|(x_2+y_2)-(x_1+y_1)|+\frac{2}{3}|(x_2-y_2)-(x_1-y_1)|\\ &\leqslant \frac{1}{4}\Big(|x_2-x_1[+|y_2-y_1|\Big)+\frac{2}{3}\Big(|x_2-x_1[+|y_2-y_1|\Big)\\ &= \frac{11}{12}\|(x_2,y_2)-(x_1,y_1)\|_1\end{aligned}$$

Donc ψ est contractante sur $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_1)$ de rapport $\dfrac{11}{12}$ $\square$

(d) Ainsi, compte tenu du théorème du point fixe, l'équation $\psi(x,y)=(x,y)$ c'est à dire encore le système (S) admet une unique solution (α,β) limite de toute suite itérée par la fonction ψ. $\square$

(e) $\psi(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=(0,1+\frac{\pi}{6})$ et $\psi(0,0)=(0,1)$ donc $\|\psi(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})-\psi(0,0)\|_\infty=\frac{\pi}{6}$ alors que $\|(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})-(0,0)\|_\infty=\frac{1}{2}$.
Or $\dfrac{\pi/6}{1/2}=\dfrac{\pi}{3}>1$ ce qui prouve que ψ n'est pas une contraction stricte pour la norme $\|\ \|_\infty$ $\square$

Ainsi le condition de contraction stricte n'est pas superflue comme le prouve la question 2) mais n'est pas non plus nécessaire. D'ailleurs comme le montre cet exemple une même application peut être contractante pour une norme et non contractante pour une norme équivalente ! $\square$

Partie III : Une équation intégrale.

5) *Questions de cours.*

(a) Notons déjà que comme on se restreint à l'espace F des applications bornées, $\|\ \|_\infty$ est bien définie sur F.
Les propriétés d'homogénéité ($\|\lambda f\|_\infty=|\lambda|\ \|f\|_\infty$) et de non dégénérescence ($(\|f\|_\infty=0)\Longrightarrow(f=0)$) sont claires.
Reste la sous-additivité. Soient f et g deux éléments quelconques de F.
On a $|f(x)+g(x)|\leqslant|f(x)|+|g(x)|\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$ pour tout $x\in[0,1]$.
Donc $\|f+g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$ par définition même de la borne supérieure. $\square$
Le fait que $(F,\|\ \|_\infty)$ soit complet (admis ici) est un exercice classique.

(b) Une application continue sur le compact $[0,1]$ est bornée. $\square$

(c) Soit a quelconque fixé dans G et soit $\varepsilon>0$ quelconque donné.
Comme la suite (g_n) converge uniformément sur G vers g, il existe N_0 tel que $n\geqslant N_0$ implique $\|g-g_n\|_\infty\leqslant\varepsilon$.
Il vient alors pour tout $h\in G$:

$$\begin{aligned}\|g(a+h)-g(a)\| &\leqslant \|g(a+h)-g_{N_0}(a+h)\|+\|g_{N_0}(a+h)-g_{N_0}(a)\|+\|g_{N_0}(a)-g(a)\|\\ &\leqslant 2\varepsilon+\|g_{N_0}(a+h)-g_{N_0}(a)\|\end{aligned}$$

Or g_{N_0} en particulier est continue sur G donc en a et il existe $\alpha>0$ tel que $\|h\|\leqslant\alpha$ implique $\|g_{N_0}(a)-g(a)\|\leqslant\varepsilon$.
Ainsi finalement $\|h\|\leqslant\alpha$ implique $\|g(a+h)-g(a)\|\leqslant 3\varepsilon$ ce qui prouve que g est continue en a. $\square$

(d) Le résultat précédent montre (par caractérisation séquentielle de l'adhérence) que E est un sous-espace fermé de $(F,\|\ \|_\infty)$. Or un sous-espace fermé d'un espace complet est complet (pour la norme induitre).
Ainsi $(E,\|\ \|_\infty)$ est-il bien un espace complet. $\square$

6) *Une équation intégrale.*

(a) En tant que fermé borné (ou produit de deux compacts) $[0,1]^2$ est compact donc $|K|$ qui est continue sur $[0,1]^2$ y est bornée et y atteint ses bornes. $\square$

(b) Pour démontrer que $\Phi(f)\in E$ c'est à dire que $\Phi(f)$ est continue sur $[0,1]$ il suffit de prouver que
$\varphi : x\longmapsto\displaystyle\int_0^1 K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\,y$ est continue.
Or $(x,y)\longmapsto K(x,y)f(y)$ est continue sur $[0,1]\times[0,1]$ et le théorème de continuité d'une intégrale propre à paramètre prouve le résultat. $\square$

(c) Soient $(f_1,f_2)\in E^2$. Il vient immédiatement pour tout $x\in[0,1]$:

$$|\Phi(f_2)(x)-\Phi(f_1)(x)|\leqslant|\lambda|\int_0^1|K(x,y)|.|f_2(y)-f_1(y)|\,\mathrm{d}\,y\leqslant|\lambda|\int_0^1 M\|f_2-f_1\|_\infty\,\mathrm{d}\,y=\lambda M\|f_2-f_1\|_\infty$$

Donc si $|\lambda|<M^{-1}$ l'application Φ est une contraction stricte de l'espace de Banach $(E,\|\ \|_\infty)$ donc admet un unique point fixe d'où le résultat. $\square$

Remarque : L'énoncé suppose implicitement $M\neq 0$ c'est à dire K non nulle. Si tel est le cas , Φ est constante égale à g, et le résultat est bien sûr encore vrai.

Partie IV : Une application géométrique.

(a) Considérons la projection orthogonale p de la droite (CB) sur la droite (CA). Comme l'angle de droite $\Big((CB),(CA)\Big)$ est égal à c modulo π il vient que si U et V sont deux points quelconques distincts de (BC) on a $\dfrac{p(U)p(V)}{UV} = |\cos c|$.

En considérant d'une part le couple $(U,V)=(M,M')$ et le couple $(U,V)=(M,C)$ on obtient :
$\dfrac{P_MP_{M'}}{MM'} = \dfrac{P_MC}{MC} = |\cos c|$ $\square$

(b) De même par projection orthogonale de la droite (AC) sur la droite (AB) on obtient $\dfrac{Q_MQ_{M'}}{P_MP_{M'}} = |\cos a[$

puis $\dfrac{R_MR_{M'}}{Q_MQ_{M'}} = |\cos b[$ par projection orthogonale de la droite (BA) sur la droite (BC).

Donc $\dfrac{R_MR_{M'}}{MM'} = |\cos a\cos b\cos c[= k < 1$.

Ainsi si x et x' sont deux réels quelconques distincts on a, en notant M et M' les deux points de l'axe des x d'abscisses respectives x et x'' : $|\varphi(x')-\varphi(x)| = R_MR_{M'} \leqslant kMM' = k|x'-x|$

Donc φ est une contraction stricte de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et partant elle admet un unique point fixe c'est à dire il existe un unique point M de la droite (BC) tel que $R_M = M$. $\square$

FIN