CCP 2009. Option MP. Mathématiques 2.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

EXERCICE 1

1) Si λ est vecteur propre de u et x un vecteur propre (non nul) associé, une itération immédiate montre que pour tout entier k on a $u^k(x) = \lambda^k x$ et donc que $P(u)(x) = P(\lambda)x$ pour tout polynôme P.
Comme x est non nul, il en découle que $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$. $\square$

2) Soit λ une valeur propre de u, x un vecteur propre (non nul) associé et P un polynôme annulateur de u. Alors $P(u)(x) = 0$ mais également $P(u)(x) = P(\lambda)x$ d'après la question précédente. Donc $P(\lambda)x = 0$ soit $P(\lambda) = 0$ puisque x est non nul. Ainsi les valeurs propres de u sont à rechercher parmi les racines de P. $\square$

L'inclusion peut être stricte comme le montre l'exemple de l'identité annulée par le polynome $X^2 - 1$. $\square$

3) $X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$ donc la seule valeur propre possible de u est 1 puisque E est un $\mathbb{R}$-espace-vectoriel. Comme la dimension est impaire, le polynôme caractéristique est de degré impair donc admet au moins une racine réelle par le théorème des valeurs intermédiaires.
En conclusion u admet une et une seule valeur propre : 1. $\square$

De manière plus précise (en passant sur $\mathbb{C}$), si i est valeur propre de multiplicité p alors $-i$ est également valeur propre avec le même ordre de multiplicité car le polynôme caractérisqtique est à coefficients réels. Comme la dimension est impaire, 1 est nécessairement valeur propre avec un ordre de multiplicité impair. Finalement le spectre complexe est de la forme $(1, \ldots, 1, i, \ldots, i, -i, \ldots, -i)$ où 1 figure un nombre impair de fois et i et $-i$ le même nombre de fois éventuellement nul. $\square$

EXERCICE 2

1) $u = e_1 - 2e_3$ appartient au plan Π. Or w est orthogonal à Π. Donc si $v = w \wedge u = -6e_1 + 5e_2 - 3e_3$ alors (u, v) est bien base de Π et (u, v, w) est une base orthogonale de E. $\square$

2) On a évidemment $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\square$

3) La base (u', v', w') avec $u' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}u$ $v' = \dfrac{1}{\sqrt{70}}v$ et $w' = \dfrac{1}{\sqrt{14}}w$ est orthonormale et la matrice de s dans cette bese est encore évidemment S'. En notant P la matrice de passage de la base canonique à cette base, c'est à dire la matrice dont les colonnes sont les composantes de u', v' et w' dans la base canonique, on a $S = P^{-1}S'P = {}^tPS'P$ puisque P est orthogonale. On évite ainsi tout calcul d'inverse de matrice.
On trouve $S = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ $\square$

Remarque : On obtient plus rapidement encore cette matrice en notant que $s(x) = x - 2(w'|x)w' = x - \dfrac{1}{7}(w|x)w$ ce qui permet un calcul instantané des colonnes de S ! $\square$

PROBLÈME : RÉSULTANT DE DEUX POLYNÔMES.

Partie I : Définition et propriétés.

1) *Cas où* u *est bijective*.

(a) Commençons par remarquer, par considération des degrés, que u est bien une application de E dans F.

Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ et $\Big((A,B),(C,D)\Big)\in E^2$. On a :

$$\begin{aligned}u\big(\lambda(A,B)+\mu(C,D)\big)&=u\big(\lambda A+\mu C,\lambda B+\mu D\big)=P.(\lambda A+\mu C)+Q.(\lambda B+\mu D)=\lambda(PA+QB)+\mu(PC+QD)\\&=\lambda u(A,B)+\mu u(C,D)\quad\square\end{aligned}$$

(b) Si u est bijective il existe en particulier $(A,B)\in E$ tel que $u(A,B)=1$ ce qui prouve que P et Q sont premiers entre eux par le théorème de Bezout. $\square$

(c) Supposons P et Q premiers entre eux et soit $(A,B)\in\operatorname{Ker}u$.

On a $PA=-QB$ donc Q divise A par le théorème de Gauss (car Q divise PA et est premier avec P).

Or Q est de degré q et A de degré au plus $q-1$ (avec la convention usuelle que le degré du polynôme nul est égal à $-\infty$). Il en résulte que A est le polynôme nul.

Il reste alors $QB=0$ donc $B=0$ car P est non nul.

Ainsi $\operatorname{Ker}u$ est réduit au polynôme nul et u est bijective en tant qu'application linéaire injective entre deux espaces de même dimension finie $p+q$. $\square$

2) Matrice de u

(a) L'image de la base $\mathcal{B}$ par u est la famille $\Big(P,XP,\dots,X^{q-1}P,Q,XQ,\dots,X^{p-1}Q\Big)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}'$ de F est la matrice $M_{P,Q}$ associée à $Res(P,Q)$. $\square$

(b) Ainsi $\det u=Res(P,Q)$ et compte tenu de la question 1) :

$Res(P,Q)\neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux. $\square$

3) Racines multiples.

(a) P admet une racine multiple si et seulement si P et P' admettent une racine commune donc si et seulement si P et P' ne sont pas premiers entre eux donc si et seulement si $Res(P,P')=0$. $\square$

(b) La condition est $Res(b+aX+X^3,a+3X^2)=0$.

En effectuant les opérations de Gauss $L_2\longleftarrow L_2-\dfrac{a}{3}L_4$ et $L_3\longleftarrow L_3-\dfrac{a}{3}L_5$ on ramene ce déterminant 5×5 à un déterminant triangulaire par blocs donc au calcul d'un déterminant d'ordre 3 et d'un déterminant d'ordre 3.

On trouve que la condition est $4a^3+27b^2=0$. $\square$

Partie II : Applications.

4) Équation de Bezout.

(a) L'énoncé suggère (impose ?) de vérifier que $Res(P,Q)\neq0$. Or il s'agit là d'un déterminant 7×7 sans rien de particulier ! Un calcul stupide montre que ce déterminant vaut 1. $\square$

Il est beaucoup plus rapide de noter que $P=(X+1)Q+X^2$ ce qui prouve que la seule racine commune possible de P et Q est 0 qui ne convient pas ! $\square$

(b) Comme u est bijective, un tel couple existe et est unique : il s'agit de $u^{-1}(1)$.

Donc $A_0=a_0+a_1X+a_2X^2$ et $B_0=b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3$ convient (Cf question 2.a) si et seulement si, en notant $C={}^t(a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2,b_3)$ et $D={}^t(1,0,0,0,0,0,0)$, on a $Res(P,Q)C=D$.

Cela conduit à résoudre un système linéaire de 7 équations à 7 inconnues. La méthode du pivot de Gauss conduit à la solution $A_0=1-X-X^2$ et $B_0=X+2X^2+X^3$. $\square$

Là encore il est plus rapise d'appliquer l'algorithme d'Euclide :

En notant $R_0=X^2$, $R_1=-X+1$, $Q_0=X+1$, $Q_1=X$ et $Q_2=-X-1$ on obtient (algorithme d'Euclide):

$\begin{cases}P=QQ_0+R_0\\Q=R_0Q_1+R_1\\R_0=R_1Q_2+1\end{cases}$ donc $1=-R_1Q_2+R_0=-(Q-R_0Q_1)Q_2+R_0=-\big(Q+(QQ_0-P)Q_1\big)Q_2-QQ_0+P$ donc

$(Q_1Q_2+1)P-(Q_0+Q_2+Q_0Q_1Q_2)Q=1$ soit $(1-X-X^2)P+(X+2X^2+X^3)Q=1$. $\square$

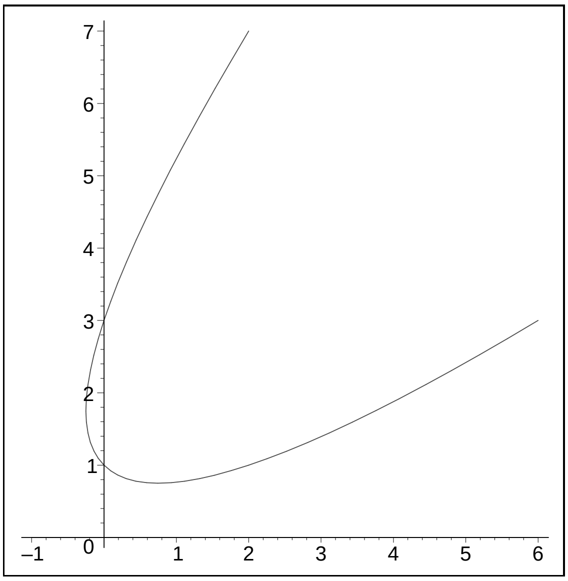
(c) • Si (A,B) vérifie $PA+QB=1$ alors $PA+QB=PA_0+QB_0$ donc $P(A-A_0)=-Q(B-B_0)$ (1).

Ainsi Q divise $(A-A_0)P$ donc $A-A_0$ d'après le théorème de Gauss puisque P et Q sont premiers entre eux. Donc il existe $R\in\mathbb{C}[X]$ tel que $A=A_0+QR$. (1) s'écrit alors $PR=-(B-B_0)$ donc $B=B_0-PR$.

ainsi si (A,B) est solution, il existe $R\in\mathbb{C}[X]$ tel que $A=A_0+QR$ et $B=B_0-PR$.

- Réciproquement tout couple de cette forme convient clairement.
- En conclusion les couples solution sont tous les couples de la forme (A_0+QR,B_0-PR) avec $R\in\mathbb{C}[X]$. $\square$

5) Équation d'une courbe.
(a)



- Les variations de x et y sont immédiates.
  Tangente verticale en $(-\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$ obtenue pour $t = -\frac{1}{2}$.
  Tangente horizontale en $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ obtenue pour $t = \frac{1}{2}$.
- Lorsque $t \to \pm\infty$, le développement vectoriel
  $\overrightarrow{OM}(t) = t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \overrightarrow{O}(1)$
  montre que la courbe présente une branche parabolique dans la direction de la première bissectrice.

  Ce que l'on peut également retrouver en notant que $\frac{y(t)}{x(t)} \to 1$ puis que $y(t) - x(t) \to \infty$.

(b) $\Big(M(x,y) \in \Gamma\Big) \iff \Big(\exists t \in \mathbb{R}$ t.q. $\begin{cases} P(t) = x \\ Q(t) = y \end{cases}\Big) \iff \Big(A$ et B ont une racine commune$\Big) \iff \Big(Res(A,B) = 0\Big)$
Dans notre cas particulier $Res(A,B)$ est un déterminant d'ordre 4 et on obtient ainsi :
$M(x,y) \in \Gamma \iff x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 3 = 0$ □

(c) La courbe Γ admet donc pour équation algébrique $(x-y)^2 - 4y + 3 = 0$ soit $X^2 - Y = 0$ en effectuant le changement de repère (non orthonormé) $\begin{cases} X = x - y \\ Y = 4y - 3 \end{cases}$. Il s'agit donc d'une parabole. □

6) Nombre algébrique.

On peut très facilement réoudre cette question sans la notion de résultant :
$Q_{\sqrt{3}}(X) = (\sqrt{3} - X)^2 - 7 = X^2 - 2\sqrt{3}X - 4$ admet $\sqrt{3} \pm \sqrt{7}$ pour racines donc $(X^2-4)^2 = 12X^2$ soit $X^4 - 20X^2 + 16$ admet $\pm(\sqrt{3} \pm \sqrt{7})$ comme racines.
Comme on a 4 racines distinctes, on a bien toutes les racines. □

FIN