

Partie 1 :

1a On remplace la « ligne n » par la « ligne n moins λ_1 fois la ligne $n-1$ » ; puis la « ligne $n-1$ » par la « ligne $n-1$ moins λ_1 fois la ligne $n-2$ » ; ... ; puis la ligne 2 par la « ligne 2 moins λ_1 fois la ligne 1 ». Le déterminant est inchangé.

1b On procède par récurrence en utilisant le 1a et en développant par rapport à la première colonne.

2 Si $\sum_{k=1}^{k=n} a_k f_k = 0$, alors en dérivant p fois, on obtient : $\sum_{k=1}^{k=n} a_k \lambda_k^p f_k = 0$.

Et en prenant la valeur en 0 : Pour tout entier p , $\sum_{k=1}^{k=n} a_k \lambda_k^p = 0$.

Pour $0 \leq p \leq n-1$, ceci se traduit matriciellement par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-1} & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les λ_k sont deux à deux distincts, donc la matrice précédente est inversible.

(Son déterminant est non nul d'après la question 1b.)

Donc les a_k sont tous nuls. La famille est libre.

Partie 2 :

1 La matrice K a N colonnes, donc $\text{rang}(K) \leq N$. Si $\text{rang}(K) < N$, alors $\dim(\ker(K)) = N - \text{rang}(K) > 0$. (Théorème du rang ; l'ensemble de départ est $\mathbb{C}^N$)

Soit $y \in \ker(K)$, non nul. $Ky = 0$, donc pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$, $BA^k y = 0$.

Ceci contredit l'hypothèse **[c]**.

2 Le noyau de K est réduit à $\{0\}$. (théorème du rang)

Si y est un vecteur propre de A et appartient au noyau de B , alors $By = 0$; $BAy = 0$; ...

Et donc, y est dans le noyau de K . Ceci contredit l'hypothèse **[d]**.

3a On effectue la division euclidienne de X^k par le polynôme caractéristique de A (appelé χ_A)

$X^k = \chi_A(X) \cdot Q_k(X) + P_k(X)$ où $\deg(P_k) < \deg(\text{car}(A)) = N$.

On prend alors la valeur en A : On obtient $A^k = P_k(A)$. (Caley-Hamilton)

3b Soit $y \in \mathbb{C}^N - \{0\}$. Si $BA^k y = 0$ pour tout $k < N$, alors si $k \geq N$, $BA^k y = BP_k(A)y = 0$.

Donc, $B \exp(At)y = \sum_0^{+\infty} B \frac{A^k t^k}{k!} y = 0$.

Ceci contredit l'hypothèse **[b]**.

4 Si y est un vecteur propre associé à λ pour la matrice A , alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k y = \lambda^k y$; et donc y est un vecteur propre associé à $e^{\lambda t}$ pour la matrice $\exp(tA)$.

Comme A est diagonalisable, $A = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(A - \lambda_i I_N)$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les p valeurs propres distinctes de A .

Soit $y \in \mathbb{C}^N$ tel que $B \exp(At)y = 0$, $\forall t \in [0, +\infty[$.

$y = \sum_{i=1}^p y_i$ où y_i est un vecteur propre associé à λ_i pour la matrice A .

$$B \exp(At)y = B \left(\sum_{i=1}^p e^{\lambda_i t} y_i \right) = \sum_{i=1}^p e^{\lambda_i t} B y_i = 0.$$

Donc, d'après la question I2, la famille des $\exp(\lambda_i \cdot)$ étant libre, $B y_i = 0$, pour tout i .

Donc y_i est dans le noyau de B , pour tout i .

D'après l'hypothèse [a], $y_i = 0$, pour tout i . Donc $y = 0$.

Le seul vecteur pour lequel l'application du [b] est identiquement nulle est le vecteur nul.

5 On a montré dans un premier temps que : $[b] \Rightarrow [c] \Rightarrow [d] \Rightarrow [a]$.

Puis, que : Si A est diagonalisable, alors $[a] \Leftrightarrow [b] \Leftrightarrow [c] \Leftrightarrow [d]$

Partie 3 : On suppose que $A^* = \overline{A} = -A$, et donc que A est diagonalisable.

$$1 \quad z = \langle AX, X \rangle = \overline{\langle X, AX \rangle} = \overline{\langle A^* X, X \rangle} = \overline{\langle -AX, X \rangle} = -\overline{\langle AX, X \rangle} = -\bar{z}.$$

Donc $\langle AX, X \rangle$ est un imaginaire pur.

Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , alors

$\langle AX, X \rangle = \langle \lambda X, X \rangle = \lambda \langle X, X \rangle$ est imaginaire pur et $\langle X, X \rangle$ est réel, donc λ est imaginaire pur.

2 remarque : Si $C \in M_N(\mathbb{C})$, on utilise la formule $\frac{d}{dt}(\exp(Ct)) = C \exp(Ct)$.

Il est alors facile de vérifier que $X(t) = \exp((A - B^*B)t) X_0$ convient.

Son unicité découle de Cauchy- Lipschitz. ($f(t, X) = (A - B^*B)X$ est lipschitzienne en X (on utilise la norme linéaire))

$$\begin{aligned} 3 \quad \frac{d}{dt} \|X(t)\|^2 &= \frac{d}{dt} \langle X(t), X(t) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} X(t), X(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{d}{dt} X(t) \right\rangle = 2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{d}{dt} X(t), X(t) \right\rangle \\ &= 2 \operatorname{Re} \langle (A - B^*B)X(t), X(t) \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle AX(t), X(t) \rangle - 2 \operatorname{Re} \langle B^*BX(t), X(t) \rangle \\ &= 0 - 2 \operatorname{Re} \langle BX(t), BX(t) \rangle = -2 \|BX(t)\|^2 \quad (\text{car } B^{**} = B). \end{aligned}$$

L'application $t \rightarrow \|X(t)\|^2$ est donc décroissante. (sa dérivée est négative.)

Ainsi, $\forall t \in [0, +\infty[$, $\|X(t)\|^2 \leq \|X(0)\|^2 = \|X_0\|^2$.

Donc $\|\exp((A - B^*B)t) X_0\| \leq \|X_0\|$ pour tout X_0 . Ainsi $\|\exp(A - B^*B)t\| \leq 1$.

4 L'application $t \mapsto \|X(t)\|$ est décroissante et minorée (par 0), donc elle a une limite L .

5a L'application $t \mapsto \|X(t)\|^2$ est constante, donc sa dérivée est nulle.

Donc $-2\|BX(t)\|^2 = 0$, pour tout $t \in [0, +\infty[$. $BX(t) = 0$.

5b Comme $BX(t)=0$: l'équation (1) devient : (1)' $\frac{dX}{dt}(t) = AX(t)$ et $X(0) = X_0$, et la solution est donc :

$X(t) = \exp(At)X_0$ (Résultat de la question III2)

Donc $B \exp(At)X_0 = 0$. Et comme $a \Leftrightarrow b$ (Q II5) : $X_0 = 0$.

Comme $L \in [0, \|X_0\|]$, $L = 0$.

6a L'application $t \mapsto \|X(t)\|$ arrive dans le compact $[0, \|X_0\|]$.

La suite $X(t_k)$ est donc dans la boule fermée de rayon $\|X_0\|$, qui est, elle aussi compacte. Elle a donc une valeur d'adhérence dans cette boule. On l'appelle ξ_0 .

$$\begin{aligned} \boxed{6b} \quad X(t_{\varphi(k)} + t) &= \exp((A - B^*B)(t_{\varphi(k)} + t))X_0 = \exp((A - B^*B)t) \exp((A - B^*B)t_{\varphi(k)})X_0 \\ &\quad (\text{car } (A - B^*B)t \text{ et } (A - B^*B)t_{\varphi(k)} \text{ commutent.}) \\ &= \exp((A - B^*B)t)X(t_{\varphi(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \exp((A - B^*B)t)\xi_0 = \xi(t). \\ &\quad (\text{car } \exp((A - B^*B)t) \text{ est continue.}) \end{aligned}$$

$$\boxed{6c} \quad t \rightarrow \|X(t)\| \text{ est décroissante, et } \|X(t_{\varphi(k)})\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \|\xi_0\|. \text{ Donc } \|X(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \|\xi_0\|.$$

De plus, $\|X(t_{\varphi(k)} + t)\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \|\xi(t)\|$. Donc $\|\xi(t)\| = \|\xi_0\|$, pour tout t .

On peut donc appliquer le résultat de la Q 5b. $L=0$.

$\boxed{7a}$ On doit sans doute trouver plus simple, mais bon, voilà :

On procède par l'absurde. On suppose donc que $\|\exp(A - B^*B)t\|$ ne tend pas vers 0.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout entier n , il existe t_n tel que $\sup_{\|X\|=1} \|\exp(A - B^*B)t_n X\| > \varepsilon$.

(remarque : La définition de l'énoncé de la norme linéaire est équivalente à celle utilisée ici.)

Il existe alors X_n tel que $\|X_n\| = 1$ et $\|\exp(A - B^*B)t_n X_n\| > \varepsilon$.

La sphère de rayon 1 étant compacte, on extrait une sous-suite $(X_{\varphi(n)})$ de (X_n) convergeant vers X_0 ,

de norme 1. On choisit N tel que si $\varphi(n) > N$, alors $\|X_{\varphi(n)} - X_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n > N$.

$X_{\varphi(n)} = X_{\varphi(n)} - X_0 + X_0$, donc,

$$\varepsilon < \|\exp(A - B^*B)t_{\varphi(n)} X_{\varphi(n)}\| \leq \|\exp(A - B^*B)t_{\varphi(n)} (X_{\varphi(n)} - X_0)\| + \|\exp(A - B^*B)t_{\varphi(n)} X_0\|.$$

$$\text{Donc } \varepsilon \leq \|\exp(A - B^*B)t_{\varphi(n)} X_{\varphi(n)}\| \cdot \|X_{\varphi(n)} - X_0\| + \|\exp(A - B^*B)t_{\varphi(n)} X_0\|.$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon \leq 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \|\exp(A - B^*B)t_{\varphi(n)} X_0\|.$$

$$\text{Donc, } \frac{\varepsilon}{2} \leq \|\exp(A - B^*B)t_{\varphi(n)} X_0\|, \text{ pour tout } n \text{ tel que } \varphi(n) > N.$$

Ceci contredit le fait que $\|\exp(A - B^*B)tX_0\| \rightarrow 0$. (Q III4+6c)

$\boxed{7b}$ Soit X_k (de norme 1) un vecteur propre de M pour la valeur propre λ_k .

$\|\exp(Mt)X_k\| = \|e^{\lambda_k t} X_k\| = |e^{\lambda_k t}|$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, donc $\text{Re}(\lambda_k) < 0$.

$\boxed{7c}$ On suppose que $Y \in \text{Ker}(M - \lambda_k I_N)^{m_k}$.

Soit $f(t) = \left(\sum_{p=0}^{m_k-1} \frac{1}{p!} (M - \lambda_k I_N)^p t^p \right) e^{\lambda_k t} Y$. Montrons que f est solution du système : $\begin{cases} X'(t) = MX(t) \\ X(0) = Y \end{cases}$.

Ainsi, f sera égale à $\exp(Mt)Y$, qui est l'unique solution du système précédent.

$f(0) = I_N e^0 Y = Y$. C'est un bon début.

$$\begin{aligned} Mf(t) &= (M - \lambda_k I_N)f(t) + \lambda_k I_N f(t) = \left(\sum_{p=0}^{m_k-1} \frac{1}{p!} (M - \lambda_k I_N)^{p+1} t^p \right) e^{\lambda_k t} Y + \lambda_k f(t). \\ &= \left(\sum_{p=1}^{m_k} \frac{1}{(p-1)!} (M - \lambda_k I_N)^p t^{p-1} \right) e^{\lambda_k t} Y + \lambda_k f(t). \end{aligned}$$

Or, $(M - \lambda_k I_N)^{m_k} Y = 0$ car $Y \in \text{Ker}(M - \lambda_k I_N)^{m_k}$.

$$\text{Donc, } Mf(t) = \left(\sum_{p=1}^{m_k-1} \frac{1}{(p-1)!} (M - \lambda_k I_N)^p t^{p-1} \right) e^{\lambda_k t} Y + \lambda_k f(t)$$

$$\text{D'autre part, } f'(t) = \left(\sum_{p=1}^{m_k-1} \frac{1}{(p-1)!} (M - \lambda_k I_N)^p t^{p-1} \right) e^{\lambda_k t} Y + \lambda_k f(t). \text{ C'est gagné !}$$

On a exhibé le polynôme Q_k de l'énoncé.

Si $Y \in \mathbb{C}^N$, On peut décomposer Y de façon unique en : $Y = \sum_{k=1}^n Y_k$.

On peut aussi vérifier que $\|Y\|_2 = \sup_k (\|Y_k\|)$ est une norme sur $\mathbb{C}^N$. (facile)

Les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

Il existe donc a , indépendant de Y tel que $\|Y\|_2 \leq a \|Y\|$, pour tout Y .

On peut passer aux choses sérieuses :

$$\begin{aligned} \text{Soit } Y \in \mathbb{C}^N, \|\exp(Mt)Y\| &= \left\| \exp(Mt) \left(\sum_{k=1}^n Y_k \right) \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|\exp(Mt)Y_k\| = \sum_{k=1}^n \|e^{\lambda_k t} Q_k(t) Y_k\| \\ &\leq \sum_k |e^{\lambda_k t}| \|Q_k(t)\| \|Y_k\| \leq N \sup_k |e^{\lambda_k t}| \cdot \sup_k \|Q_k(t)\| \|Y\|_2 \\ &\leq a N \sup_k |e^{\lambda_k t}| \cdot \sup_k \|Q_k(t)\| \|Y\| \end{aligned}$$

Il suffit de prendre c plus petit que l'opposé de la plus petite partie réelle des λ_k .

On conclut avec le théorème des croissances comparées.

8 Si X est dans le noyau de A et de B , alors

$$\exp(A - B^*B)tX = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (A - B^*B)^k tX = tX + 0 + \dots + 0 + \dots = tX.$$

Donc $\|\exp(A - B^*B)t\| \geq t$, donc ne peut tendre vers 0.

L'hypothèse [a] est donc nécessaire.

Partie 4 :

1 Sans difficulté.

$$2 \quad c_k(\omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_0(t) e^{-ikt} dt.$$

On fait deux intégrations par parties successives. On obtient le résultat demandé.

(le fait que les fonctions arrivent dans $\mathbb{C}^N$ ne pose pas de problème.)

Comme $\frac{d^2 \omega_0}{dt^2}$ est continue, $\sum_k \left\| c_k \left(\frac{d^2 \omega_0}{dt^2} \right) \right\|^2$ converge. (Parseval, la continuité par morceaux suffit.)

$$\sum_k \frac{1}{k^2} \text{CV (Riemann)} \text{ et } \sum_k \left\| c_k \left(\frac{d^2 \omega_0}{dt^2} \right) \right\|^2 \text{ CV.}$$

$$\text{Donc, } \sum_k \frac{1}{k} \left\| c_k \left(\frac{d^2 \omega_0}{dt^2} \right) \right\| \text{ CV.} \quad (\text{Schwarz : } \left(\sum a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum a_k^2 \right) \left(\sum b_k^2 \right))$$

$$\text{Donc, } \sum \|kc_k(\omega_0)\| \text{ CV.}$$

$$3 \quad \text{On note } f_k(t, x) = \exp[(ikA - B^*B)t] c_k(\omega_0) e^{ikx}$$

$$\left\| \exp \left[(ikA - B^*B)t \right] \right\| \leq 1, \text{ donc } \|f_k(t, x)\| \leq \|c_k(\omega_0)\|.$$

$\sum \|c_k(\omega_0)\|$ CV, donc $\sum f_k(t, x)$ CVN par rapport à x et à t .

$$\frac{\partial}{\partial x} f_k(t, x) = \exp \left[(ikA - B^*B)t \right] c_k(\omega_0) ike^{ikx}, \text{ donc } \left\| \frac{\partial}{\partial x} f_k(t, x) \right\| \leq \|kc_k(\omega_0)\|.$$

$\sum \|kc_k(\omega_0)\|$ CV, donc $\sum \frac{\partial}{\partial x} f_k(t, x)$ CVN par rapport à x .

$$\omega = \sum f_k \text{ est donc dérivable par rapport à } x \text{ et } \frac{\partial}{\partial x} \omega(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp \left[(ikA - B^*B)t \right] c_k(\omega_0) ike^{ikx}.$$

ω est aussi dérivable par rapport à t , et avec la question III2 :

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp \left[(ikA - B^*B)t \right] c_k(\omega_0) e^{ikx} = (ikA - B^*B) \exp \left[(ikA - B^*B)t \right] c_k(\omega_0) e^{ikx},$$

$$\text{Ainsi, } \left\| \frac{\partial}{\partial t} f_k \right\| \leq \|ikA - B^*B\| \cdot \|\exp[...]\| \cdot \|c_k(\omega_0)\| \leq (k\|A\| + \|B^*B\|) \cdot 1 \cdot \|c_k(\omega_0)\|.$$

$\sum \|kc_k(\omega_0)\|$ et $\sum \|c_k(\omega_0)\|$ CV, donc $\sum \frac{\partial}{\partial t} f_k(t, x)$ CVN. Donc ω est aussi dérivable par rapport à t

$$\text{et : } \frac{\partial}{\partial t} \omega(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (ikA - B^*B) \exp \left[(ikA - B^*B)t \right] c_k(\omega_0) e^{ikx}.$$

Ainsi s'achève la démonstration du premier résultat du (4).

$$f_k(t, x + 2\pi) = f_k(t, x), \text{ donc } \omega(t, x + 2\pi) = \omega(t, x)$$

$\sum f_k(t, x)$ CVU par rapport à x sur $[0, 2\pi]$, (car normalement)

et les f_k sont continues donc intégrables sur $[0, 2\pi]$.

On peut donc intervertir le signe $\sum$ et le symbole $\int$.

$$\text{Or, } \int_0^{2\pi} f_k(t, x) dx = \left[\exp \left[(ikA - B^*B)t \right] c_k(\omega_0) \frac{e^{ikx}}{ik} \right]_0^{2\pi} = 0, \text{ pour } k \neq 0.$$

De plus, $c_0(\omega_0) = 0$: $f_0(t, x) = 0$. Le troisième résultat du (4) vient de tomber.

$$\omega(0, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\omega_0) e^{ikx} = \omega_0(x) \text{ (Théorème de Dirichlet)}$$

$$\boxed{4} \int_0^{2\pi} \|\omega(t, x)\|^2 dx = \int_0^{2\pi} \left\| \sum f_k(t, x) \right\|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} \left(\sum \|f_k(t, x)\| \right)^2 dx \leq \|\exp[...]\|^2 \cdot \left(\sum \|c_k(\omega_0)\| \right)^2 2\pi$$

$$\text{Or, } \|\exp[(ikA - B^*B)t]\|^2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ (Question 7a, car } iA \text{ et } B \text{ vérifient la propriété a.)}$$

$$\text{Donc, } \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \|\omega(t, x)\|^2 dx = 0.$$

Partie 5 :

1 Première méthode (de Julie Gauthier, Dijon) :

On montre que $\varphi : Y \rightarrow \sqrt{\|BY\|^2 + \|BAY\|^2}$ est une norme :

Pour l'inégalité triangulaire, on remarque que :

$$\left(\|B(Y+Z)\|^2 + \|BA(Y+Z)\|^2 \right)^{1/2} = \left(|\langle B(Y+Z), e_1 \rangle|^2 + |\langle B(Y+Z), e_2 \rangle|^2 + |\langle BA(Y+Z), e_1 \rangle|^2 + |\langle BA(Y+Z), e_2 \rangle|^2 \right)^{1/2} \text{ où } e_1 \text{ et } e_2$$

forment la base canonique de $\mathbb{C}^2$; et on conclut avec la norme classique sur $\mathbb{C}^4$.

D'autre part, $\varphi(Y) = 0 \Rightarrow Y = 0$ grâce au [c].

On conclut grâce à l'équivalence des normes.

Deuxième méthode :

L'existence de C_2 découle des deux inégalités suivantes :

$$\|BY\|^2 \leq \|B\|^2 \|Y\|^2 \quad \text{et} \quad \|BAY\|^2 \leq \|BA\|^2 \|Y\|^2$$

Pour l'existence de C_1 , on procède par l'absurde :

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $Y_n \in \mathbb{C}^N$ tel que $\frac{1}{n} \|Y_n\|^2 > \|BY_n\|^2 + \|BAY_n\|^2$ (i).

On est sûr que Y_n est non nul.

On pose $Z_n = \frac{Y_n}{\|Y_n\|}$. L'inégalité (i) devient : $\frac{1}{n} > \|BZ_n\|^2 + \|BAZ_n\|^2$ (j).

La suite (Z_n) est dans la sphère de rayon 1, qui est compacte.

On peut donc en extraire une sous-suite convergente. (vers Z)

En passant à la limite dans (j), on obtient : $0 \geq \|BZ\|^2 + \|BAZ\|^2$.

Donc $BZ = 0$; $BAZ = 0$ et $\|Z\| = 1$.

Ceci contredit l'équivalence $II[a] \Leftrightarrow II[c]$. (ici, $N=2$)

2a X_k résout le problème de Cauchy suivant : $\frac{d}{dt} X_k(t) = (ikA - B^*B)X_k(t)$ et $X_k(0) = c_k(\omega_0)$

2b Première méthode : (de vous savez qui.)

$$2|\operatorname{Im}\langle BAY, BY \rangle| = 2|\operatorname{Re}\langle iBAY, BY \rangle| \leq \|iBAY\|^2 + \|BY\|^2 \leq C_2 \|Y\|^2$$

Soit $\varepsilon_0 = \frac{1}{C_2}$. Pour tout $k \neq 0$ et tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, $C_2 \frac{\varepsilon}{2|k|} \leq \frac{1}{2}$.

Donc $\frac{\varepsilon}{k} \operatorname{Im}\langle BAY, BY \rangle \in \left[-\frac{1}{2} \|Y\|^2, \frac{1}{2} \|Y\|^2 \right]$. On ajoute $\|Y\|^2$.

Deuxième méthode:

Cauchy-Schwarz : $|\langle BAY, BY \rangle| \leq \|BAY\| \|BY\| \leq \|BA\| \|B\| \|Y\|^2 \leq C \|Y\|^2$.

On peut imposer sans soucis $C > 0$.

On pose $\varepsilon_0 = \frac{1}{2C}$. Pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et pour tout $Y \in \mathbb{C}^N$: $|\varepsilon \langle BAY, BY \rangle| \leq \frac{1}{2C} C \|Y\|^2 = \frac{\|Y\|^2}{2}$.

On peut toujours diviser par k , prendre la partie imaginaire ; l'inégalité est encore vraie.

Ainsi : $-\frac{\|Y\|^2}{2} \leq \frac{\varepsilon}{k} \operatorname{Im}\langle BAY, BY \rangle \leq \frac{\|Y\|^2}{2}$.

Il n'y a plus qu'à ajouter $\|Y\|^2$ pour obtenir l'inégalité demandée.

2c Pas de problème pour dériver : X_k est dérivable, le produit scalaire et la partie imaginaire aussi.

$$\frac{d}{dt} L_{\varepsilon,k} [X_k(t)] = -2 \|BX_k(t)\|^2 + \frac{\varepsilon}{k} \operatorname{Im} \left(\left\langle BA \frac{d}{dt} X_k(t), BX_k(t) \right\rangle + \left\langle BAX_k(t), B \frac{d}{dt} X_k(t) \right\rangle \right) \quad (Q \text{ III3})$$

On remplace les $\frac{d}{dt} X_k(t)$ par $(ikA - B^*B)X_k(t)$; et voilà.

2d

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L_{\varepsilon,k} [X_k(t)] &= -2\|BX_k(t)\|^2 + \frac{\varepsilon}{k} \operatorname{Im}(\langle BAi_k AX_k(t), BX_k(t) \rangle) - \frac{\varepsilon}{k} \operatorname{Im}(\langle BAB^* BX_k(t), BX_k(t) \rangle) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{k} \operatorname{Im}(\langle BAX_k(t), ikBAX_k(t) \rangle) - \frac{\varepsilon}{k} \operatorname{Im}(\langle BAX_k(t), BB^* BX_k(t) \rangle) \\ &= -2\|BX_k(t)\|^2 + \alpha + \beta + \gamma + \delta \end{aligned}$$

$$\alpha = \varepsilon \operatorname{Im}(\langle BAAX_k, BX_k \rangle) \leq \varepsilon |\langle BAAX_k, BX_k \rangle| \leq \varepsilon \|BAAX_k\| \cdot \|BX_k\| \leq \varepsilon \|BAA\| \cdot \|X_k\| \cdot \|BX_k\|.$$

$$|\beta| \leq \varepsilon |\langle BAB^* BX_k, BX_k \rangle| \quad (k \neq 0)$$

Donc $|\beta| \leq \varepsilon \|BAB^* B\| \cdot \|X_k\| \cdot \|BX_k\|$ (Cauchy-Schwarz) Et de deux.

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{k} \operatorname{Im}(-ik \langle BAX_k, BAX_k \rangle) = \varepsilon \operatorname{Im}(-i \|BAX_k\|^2) = -\varepsilon \|BAX_k\|^2. \quad \text{Et de trois.}$$

$$|\delta| \leq \varepsilon |\langle BB^* BAX_k, BX_k \rangle| \quad (k \neq 0)$$

Donc $|\delta| \leq \varepsilon \|BB^* BA\| \cdot \|X_k\| \cdot \|BX_k\|$. Et de quatre, je mange des patates.

On en déduit l'inégalité demandée.

2e Soit $\varepsilon_1 > 0$; plus petit que ε_0 , que 1 et que $\frac{4C_1}{C_3^2 + 2C_1}$.

$$\text{Soit } C_4 = \frac{1}{3} C_1. \quad \varepsilon C_4 L_{\varepsilon,k} [X_k(t)] \leq \varepsilon \frac{1}{3} C_1 \frac{3}{2} \|X_k(t)\|^2 = \frac{\varepsilon}{2} C_1 \|X_k(t)\|^2 \quad (Q2b)$$

$$\text{De plus, } C_1 \|X_k\|^2 \leq \|BX_k(t)\|^2 + \|BAX_k(t)\|^2. \quad (Q1)$$

$$\text{Donc } -\|BAX_k(t)\|^2 \leq \|BX_k(t)\|^2 - C_1 \|X_k\|^2$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \frac{d}{dt} L_{\varepsilon,k} [X_k(t)] + \varepsilon C_4 L_{\varepsilon,k} [X_k(t)] &\leq -2\|BX_k(t)\|^2 - \varepsilon \|BAX_k(t)\|^2 + \varepsilon C_3 \|X_k(t)\| \|BX_k(t)\| \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} (C_1 \|X_k(t)\|^2) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \frac{d}{dt} L_{\varepsilon,k} [X_k] + \varepsilon C_4 L_{\varepsilon,k} [X_k] \leq -2\|BX_k\|^2 + (\varepsilon \|BX_k\|^2 - \varepsilon C_1 \|X_k\|^2) + \varepsilon C_3 \|X_k\| \|BX_k\| + \frac{\varepsilon}{2} C_1 \|X_k\|^2$$

$$\frac{d}{dt} L_{\varepsilon,k} [X_k] + \varepsilon C_4 L_{\varepsilon,k} [X_k] \leq (\varepsilon - 2) \|BX_k\|^2 + \varepsilon C_3 \|BX_k\| \|X_k\| - \frac{\varepsilon}{2} C_1 \|X_k\|^2.$$

On divise la partie de droite par $\|X_k(t)\|^2$.

On obtient un polynôme en $Z = \frac{\|BX_k(t)\|}{\|X_k(t)\|}$ de degré 2, dont le discriminant vaut :

$$\Delta = \varepsilon^2 C_3^2 + (\varepsilon - 2) 2\varepsilon C_1 = \varepsilon^2 (C_3^2 + 2C_1) - 4\varepsilon C_1 = \varepsilon (\varepsilon (C_3^2 + 2C_1) - 4C_1) < 0.$$

Donc ce polynôme est du signe de $\varepsilon - 2$, c'est à dire négatif. Ouf.

2f Soit $f(t) = L_{\varepsilon,k} [X_k(t)] - L_{\varepsilon,k} [X_k(0)] e^{-\varepsilon C_4 t}$.

$f'(t) \leq 0$, donc f est décroissante. Comme $f(0) = 0$: $f(t) \leq 0$ sur $[0, +\infty[$.

$$\boxed{3} \quad \frac{1}{2} \|X_k(t)\|^2 \leq L_{\varepsilon,k} [X_k(t)] \leq L_{\varepsilon,k} [X_k(0)] e^{-\varepsilon C_4 t} \leq \frac{3}{2} \|X_k(0)\|^2 e^{-\varepsilon C_4 t} = \frac{3}{2} \|c_k(\omega_0)\|^2 e^{-\varepsilon C_4 t}.$$

$$\text{Donc, } \|X_k(t)\| \leq \sqrt{3} \|c_k(\omega_0)\| e^{-\varepsilon_0 C_4 t}.$$

$$\boxed{4} \quad \omega(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k(t) e^{ikt}.$$

$$\|\omega(t, x)\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|X_k(t) e^{ikt}\|^2 \leq 3 \left(\sum \|c_k(\omega_0)\|^2 \right) e^{-\varepsilon C_4 t}.$$

On intègre de 0 à 2π ; et on conclut avec Parseval : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\omega_0(0, x)\|^2 dx = \sum_{\mathbb{Z}} \|c_k(\omega_0)\|^2$.