PARTIE I : Fonctions homographiques

I.A.1) Posons $s(x) = (x-a)y''(x) + 2y'(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

a. Alors $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} - a\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$.

Soit, en décalant l'indice de la dernière somme et en regroupant les termes :

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)(a_n - aa_{n+1})x^{n-1}, \quad x \in]-R, R[.$$

b. Si y est solution de (E_a) sur un intervalle ouvert contenant 0, alors s s'annule sur cet intervalle. Dans ce cas, par unicité du développement en série entière, les coefficients définissant s sont tous nuls d'où :

$$\forall n \geq 1, \qquad a_n - aa_{n+1} = 0 \text{ donc } a_n = \frac{a_1}{a^{n-1}}.$$

(suite géométrique de raison $\frac{1}{a}$).

Le rayon de convergence de la série associée est $R = a$ si $a_1 \neq 0$ ou $R = +\infty$ sinon et il vient

$$y(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_1 a^{1-n} x^n = a_0 + a_1 \frac{ax}{a-x}, \quad x \in]-R, R[.$$

c. (E_a) est une équation différentielle linéaire du second ordre homogène à coefficients continus sur $\mathbf{R}$, le coefficient devant y'' s'annule pour $x = a$. L'ensemble des solutions sur tout intervalle I ne contenant pas a est donc un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension deux.

On vérifie aisément que les restrictions à I des fonctions $y_1 : x \mapsto 1$ et $y_2 : x \mapsto \dfrac{x}{a-x}$ sont deux solutions indépendantes et par conséquent forment une base de solutions.

Si $I =]-a, a[$ ces solutions sont toutes développables en série entière.

I.A.2) Notons $I_1 =]-\infty, a[$ et $I_2 =]a, +\infty[$.

Sur $I_k, k = 1, 2$, la solution générale de (E_a) est de la forme $x \mapsto \alpha_k + \beta_k \dfrac{x}{x-a}$.

La condition de raccord continu en a impose $\beta_1 = \beta_2 = 0$ et $\alpha_1 = \alpha_2$. Le raccord est alors deux fois dérivable.

L'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ est donc la droite vectorielle des fonctions constantes.

Remarque : on pouvait intégrer directement (E_a) car linéaire du 1er ordre en y' et retrouver les résultats précédents.

I.B.1) Sur son domaine de définition, g est dérivable de dérivée $g'(x) = \dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2}$.

Donc g est constante si et seulement si $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$.

I.B.2) ***a.*** $\gamma \neq 0$ ce qui permet d'écrire $g(x) = \dfrac{x\alpha/\gamma + \beta/\gamma}{x + \delta/\gamma} = \dfrac{(x + \delta/\gamma)\alpha/\gamma + \beta/\gamma - \alpha\delta/\gamma^2}{x + \delta/\gamma} = \dfrac{\alpha}{\gamma} + \dfrac{\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2}}{x + \frac{\delta}{\gamma}}$:

$$u = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad v = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2}, \quad w = \frac{\delta}{\gamma}.$$

b. g' est du signe de $-v$ donc g est croissante si $v < 0$ et décroissante si $v > 0$.

I.B.3) Soient $M = (x, y)$ et $M' = (x', y')$ deux points de $\mathbf{R}^2$.

a. Pour h l'homothétie de centre O et de rapport k on a la suite d'équivalences :

$$M' \in h(C) \Leftrightarrow (x', y') = (kx, ky), xy = 1 \Leftrightarrow x'y' = k^2.$$

Donc l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{v}$ vérifie $h(C) = D$..

b. De même si t est la translation de vecteur (l, m), on a la suite d'équivalences :

$$M' \in t(D) \Leftrightarrow (x', y') = (x + l, y + m), xy = v \Leftrightarrow (x' - l)(y' - m) = v \Leftrightarrow y' = m + \frac{v}{x' - l}.$$

Ce qui permet de conclure que la translation t de vecteur $(l, m) = (-w, u)$ vérifie $t \circ h(C) = \Gamma$.

c. $t \circ h : (x, y) \mapsto t(\sqrt{v}x, \sqrt{v}y) = (x\sqrt{v} - yw, \sqrt{v} + u)$ est différente de l'identité pour $v \neq 1$.

Dans ce cas $t{\circ}h$ est l' homothétie de rapport $\sqrt{v}$ et de centre Ω tel que $t{\circ}h(\Omega) = \Omega$ soit $\Omega = (\dfrac{w}{\sqrt{v} - 1}, \dfrac{-u}{\sqrt{v} - 1})$.

I.B.4) Pour $a = -w$, g est solution de (E_a) sur tout intervalle ne contenant pas a.

PARTIE II : Fractions continues

II.A Etude de f

II.A.1) $x - E(x)$ est nul si et seulement si x est entier donc f est définie sur $\mathbf{R} - \mathbf{Z}$.

De plus pour tout réel x, $E(x) + 1$ est un entier p vérifiant $p \leq x + 1 < p + 1$ donc $p = E(x + 1)$

Ainsi $x + 1 - E(x + 1) = x - E(x)$ ce qui prouve la 1-périodicité de f.

II.A.2) Si $x \in]k, k + 1[$ alors $E(x) = k$ donc $f(x) = \dfrac{1}{x - k}$ ce qui coincide avec $g(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ en choisissant par exemple $\alpha = 0, \beta = \gamma = 1, \delta = -k$.

II.A.3) f étant 1-périodique, il suffit de l'étudier sur l'intervalle $]0, 1[$. Sur cet intervalle, $E(x) = 0$ donc $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Clairement l'ensemble image de f est $f(\mathbf{R} - \mathbf{Z}) = f(]0, 1[) =]1, +\infty[$.

II.A.4) Pour un réel x non entier, $E(x)$ est un entier k tel que $f(x) = \dfrac{1}{x - k}$.

Alors x est rationnel si et seulement si $x - k$ est rationnel si et seulement si $f(x)$ est rationnel.

Donc si x est irrationnel, $f(x)$ l'est aussi.

II.B Une suite récurrente

II.B.1) Si x_0 est irrationnel alors $x_1 = f(x_0)$ existe d'après II.A.1 et est irrationnel d'après II.A.4. De même $x_2 = f(x_1)$ etc... : x_n est bien défini pour tout n.

II.B.2) On suppose x_0 rationnel et x_n défini pour tout n.

a. De II.A.4 on déduit par récurrence immédiate que x_n est rationnel pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Comme $x_n = f(x_{n-1})$, on déduit de II.A.3 que $x_n > 1$ pour tout $n \geq 1$

b. Soit l'hypothèse de récurrence HR(n) :" $v_n > 0$ et $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ "

HR(0) est vraie par hypothèse.

Supposons HR(n) vraie. Alors par définition de v_{n+1}, on a $u_n = pv_n + v_{n+1}$ avec $0 \leq v_{n+1} < v_n$ et p entier. Donc $x_n = \dfrac{u_n}{v_n} = p + \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ avec $0 \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ d'où $E(x_n) = p$ et $x_n - E(x_n) = \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Réel non nul par hypothèse d'existence de x_{n+1}. Ainsi $v_{n+1} > 0$ et $x_{n+1} = f(x_n) = \dfrac{1}{x_n - E(x_n)} = \dfrac{v_n}{v_{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$. Donc HR(n+1).

D'où HR(n) vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

c. Par définition de v_{n+1} on a $v_{n+1} < v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ donc la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante. Ce qui est impossible pour une suite d'entiers positifs. L'hypothèse B.2) est donc absurde et on conclut que

si x_0 est rationnel, alors x_n n'a plus de sens à partir d'un certain rang.

II.B.3) En conclusion, on peut affirmer que x_n est bien défini pour tout n si et seulement si x_0 est irrationnel.

II.C) Le cas irrationnel

II.C.1)

```
> a :=proc(x0,n) local k,x,l ;
> x :=x0 ;l :=floor(x) ;                    # initilisations
> for k from 1 to n do
>              x :=1/(x-floor(x)) ;        # x contient xk
>              l :=floor(x) od ;           # l est  la séquence a0,a1,...,ak
> l end :                                                    # affichage a0,..an
```

II.C.2. Remarquons qu'une suite (x_n) vérifiant $x_n = f(x_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$ sera p-périodique à partir d'un rang r si et seulement si $x_{r+p} = x_r$ puisque les suites $(x_n)_{n\geq r}$ et $(x_{n+p})_{n\geq r}$ vérifient la même relation de récurrence avec une même condition initiale.

a.

```
> a(sqrt(2),4) ;
1, 2, 2, 2, 2
```

Ce résultat laisse penser que la suite (a_n) est stationnaire.

b. $x_0 = \sqrt{2}$ donc $E(x_0) = 1$ puis $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = x_0 + 1$. Alors par périodicité de f il vient $f(x_1) = f(x_0)$ soit $x_2 = x_1$. La suite (x_n) est donc stationnaire d'après la remarque préliminaire II.C.2.

Comme $a_n = E(x_n)$, la suite (a_n) est également stationnaire.

c.

```
> a(sqrt(3),4) ;
1, 1, 2, 1, 2
```

Ce résultat laisse penser que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est 2-périodique.

Vérifions le : $x_0 = \sqrt{3}$ donc $E(x_0) = 1$ puis $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

On a donc $E(x_1) = 1$ puis $x_2 = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1 = x_0 + 1$.

La périodicité de f permet comme précédemment de conclure que $f(x_2) = f(x_0)$ soit $x_3 = x_1$.

On en déduit comme précédemment que les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ sont 2-périodiques.

II.C.3) ***a.*** Pour tout $n \geq 0$ on a $a_n = E(x_n)$ avec $x_0 > 0$ par hypothèse et $x_{n+1} = f(x_n) > 1$ d'après l'ensemble image de f (II.A.3) donc pour $n \geq 0$ les a_n sont des entiers naturels, non nuls pour $n \geq 1$.

N étant stable pour l'addition et la multiplication, p_0, p_1, q_0, q_1 sont des entiers naturels. Il en est de même de p_n et de q_n par récurrence immédiate.

Puisque $a_1 \geq 1$, on a $p_1 \geq 1$,

et de $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \geq a_n p_{n-1} \geq p_{n-1}$ si pour un $n \geq 2$ on a $p_{n-1} \geq 1$ alors $p_n \geq 1$.

On conclut par récurrence que les p_n pour $n \geq 1$ sont non nuls.

Il en est de même des q_n pour $n \geq 1$ et aussi pour $n \geq 0$ puisque $q_0 = 1$

b. Pour $n \geq 2$ on a $q_n - q_{n-1} = (a_n - 1)q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-2} \geq 1$.

La suite $(q_n)_{n\geq 1}$ est donc strictement croissante.

En sommant membre à membre pour $k = 2$ à n les inégalités $q_k - q_{k-1} \geq 1$, il vient $q_n - q_1 \geq n - 1$ d'où l'on déduit $q_n \geq n$ pour tout naturel n puisque $q_1 \geq 1$ et $q_0 \geq 0$.

c. Pour $n \geq 1$ posons $U_n = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$.

Pour $n \geq 2$ on a : $p_n q_{n-1} = (a_n p_{n-1} + p_{n-2})q_{n-1}$ et $q_n p_{n-1} = (a_n q_{n-1} + q_{n-2})p_{n-1}$.

Par différence membre à membre il vient $U_n = -U_{n-1}$ donc $U_n = (-1)^{n-1} U_1$ et de $U_1 = (a_0 a_1 + 1) - a_0 a_1 = 1$ on conclut

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

d. Rappelons que $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - a_n}$ soit $x_n = a_n + \dfrac{1}{x_{n+1}}$ et posons $V_n = \dfrac{p_n + p_{n+1} x_{n+2}}{q_n + q_{n+1} x_{n+2}}$.

$$V_{n-2} = \frac{p_{n-2} + p_{n-1} x_n}{q_{n-2} + q_{n-1} x_n} = \frac{(p_n - a_n p_{n-1}) + p_{n-1} x_n}{(q_n - a_n q_{n-1}) + q_{n-1} x_n} = \frac{p_n + p_{n-1}(x_n - a_n)}{q_n + q_{n-1}(x_n - a_n)} = \frac{p_n + p_{n-1}/x_{n+1}}{q_n + q_{n-1}/x_{n+1}}$$

$$= \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}} = V_{n-1}.$$

La suite $(V_n)_{n\geq 0}$ est donc constante égale à son premier terme V_0 ; calculons le :

$$V_0 = \frac{p_0 + p_1 x_2}{q_0 + q_1 x_2} = \frac{a_0 + (a_0 a_1 + 1)x_2}{1 + a_1 x_2} = a_0 + \frac{x_2}{1 + a_1 x_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + 1/x_2} = a_0 + \frac{1}{x_1} = x_0$$

Donc $V_n = x_0$ pour tout naturel n soit :

$$\forall n \geq 0, \quad x_0 = \frac{p_n + p_{n+1} x_{n+2}}{q_n + q_{n+1} x_{n+2}}.$$

II.C.4) ***a.*** $r_n - r_{n-1} = \dfrac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$ d'après II.C.3.c)

b. Alors $|r_n - r_{n-1}| = \dfrac{1}{q_n q_{n-1}}$ car les q_n sont positifs ; la série $\sum r_n - r_{n-1}$ est donc alternée.

La suite des valeurs absolues est décroissante car la suite (q_n) est croissante, et de limite nulle car $q_n \geq n$.

Vérifiant le critère spécial, la série alternée $\sum r_n - r_{n-1}$ converge.

c. La suite (s_n) des sommes partielles de la série précédente est donc convergente et sa limite s vérifie pour tout n : $|s - s_n| \leq |r_{n+1} - r_n|$ - conséquence du critère spécial.

Or $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k - r_{k-1} = r_n - r_0$. On en déduit que $r_n = r_0 + s_n$ converge vers $r = r_0 + s$.

d. Enfin $|r - r_n| = |s - s_n| \leq |r_{n+1} - r_n| \leq \dfrac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \dfrac{1}{q_n^2}$ (la suite (q_n) décroit)

e.

```
> r :=proc(x0,n) local k,x,p,q,p0,p1,q0,q1,a0,a ;
> x :=x0 ;a0 :=floor(x) ;x :=1/(x-a0) ;a :=floor(x) ;  # initilisations
> p0 :=a0 ;q0 :=1 ;p1 :=a0*a+1 ;q1 :=a ;
> for k from  2 to n do
>         x :=1/(x-a) ;a :=floor(x) ;            # a=ak
>         p :=a*p1+p0 ;q :=a*q1+q0 ;             # p=pk, q=qk
>         p0 :=p1 ;p1 :=p ;q0 :=q1 ;q1 :=q od ;     # maj variables auxiliaires
>  p/q end :                                               # rn=p/q
```

On trouve à la main $p_2 = 7, p_3 = 17, q_2 = 5, q_3 = 12$ donc

$$r_2 = 7/5 = 1,4 \text{ et } r_3 = 17/12 \approx 1,4166.$$

On peut conjecturer que $r = x_0$.

Et le démontrer à partir de II.C.3.d) :

$$x_0 - r_n = \frac{p_n + p_{n+1}x_{n+2}}{q_n + q_{n+1}x_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{x_{n+2}(p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1})}{(q_n + q_{n+1}x_{n+2})q_n} = \frac{x_{n+2}(-1)^n}{(q_n + q_{n+1}x_{n+2})q_n}.$$

Donc $|x_0 - r_n| \leq \dfrac{x_{n+2}}{(q_n + q_{n+1}x_{n+2})q_n} \leq \dfrac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

D.1) $y_0 = \dfrac{\alpha x_0 + 1 + \alpha\delta}{x_0 + \delta} = \alpha + \dfrac{1}{x_0 + \delta}$ est bien irrationnel.

D.2) $x_0 + \delta > 1$ car $x_0 > 0$ par hypothèse. Alors du calcul précédent $E(y_0) = \alpha$ puis $y_1 = x_0 + \delta$. Donc $y_2 = f(x_0 + \delta)$ et $f(x_0 + \delta) = f(x_0)$ par périodicité de f ainsi $y_2 = x_1$. Les suites $(x_{n-1})_{n\geq 2}$ et $(y_n)_{n\geq 2}$ sont donc égales car elles vérifient la même relation de récurrence avec la même condition initiale.

On en déduit $a_{n-1} = b_n$ pour tout $n \geq 2$.

E.1) Soit $s = \alpha + \delta$. Si $s^2 + 4 = n^2$ avec n entier naturel alors $4 = (n-s)(n+s)$ ce qui conduit à $n - s = n + s = 2$ donc $s = 0$ cas exclu ; ou bien $n + s = 4$ et $n - s = 1$ donc $2n = 5$ ce qui est impossible.

Ainsi par l'absurde, Δ n'est pas le carré d'un entier donc $\sqrt{\Delta}$ est irrationnel.

E.2) Le discriminant de l'équation du second degré : $(*)$ $\quad x^2 + (\delta - \alpha)x - \alpha\delta - 1 = 0$ est $\Delta > 0$.

$(*)$ admet donc deux racines réelles z_0, z_1 et ces racines vérifiant $z_0 z_1 = -(1 + \alpha\delta) < 0$, l'une est positive et l'autre négative. De $z_0 = \dfrac{\alpha - \delta + \sqrt{\Delta}}{2}$ et compte tenu du résultat précédent, on peut conclure z_0 irrationnel, de même pour z_1.

E.3) L'équation $x = g(x)$ équivaut à $(*)$ donc $z_0 = g(z_0)$.

E.4) Alors à la fois $z_0 = x_0$ et $z_0 = y_0$ (II.D.1) donc $a_n = a_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$ (II.D.2)

Le développement en fraction continue de z_0 est donc constant à partir du rang $n = 1$.

E.5) Si $x_0 = \sqrt{1 + p^2}$ alors $x_0^2 - p^2 - 1 = 0$ donc $x_0 = z_0$ avec $\alpha = \delta = p$.

Le développement en fraction continue de x_0 est donc constant à partir du rang $n = 1$.