Partie I

Q1 Comme $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, g est bornée sur $\mathbb{R}$, de plus f est positive, donc on a la majoration :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad |f(t).g(x-t)| \leqslant \|g\|_\infty.f(t) \quad .$$

Par définition, f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x-t)\,dt$ est absolument convergente.
La majoration ci-dessus est une domination de l'intégrande valable $\forall\, x \in \mathbb{R}$, de plus à t fixé, la fonction $x \mapsto f(t).g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par composition puisque g est continue.
Les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres sont donc satisfaites, d'où la continuité de $f * g$ sur $\mathbb{R}$.
Effectuons dans l'intégrale le changement de variables $t \mapsto u = x - t$ (qui à $x \in \mathbb{R}$ fixé est bien un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$). L'intégrale obtenue reste convergente et on a l'égalité :

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u).g(u)\,du = (g*f)(x) \quad .$$

Q2 Soit (x_n) une suite convergeant vers $+\infty$. A t fixé, $f(t).g(x_n - t)$ tend (simplement) vers 0 puisque $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. De plus, on a comme précédemment la domination

$$\forall\, n \quad |f(t).g(x_n-t)| \leqslant \|g\|_\infty.f(t) \quad ,$$

où la fonction majorante est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc le théorème de convergence dominée s'applique et donne que $(f*g)(x_n) \to 0$. Comme c'est vrai pour toute suite (x_n) , par le théorème de caractérisation des limites par les suites, on a bien que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (f*g)(x) = 0$.
Le même raisonnement s'applique pour toute suite (x_n) tendant vers $-\infty$ (avec toujours la même domination), et donne que $(f*g)(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

Q3 On a déjà vu que $f*g$ était continue sur $\mathbb{R}$. (Le raisonnement de **Q1)** s'pplique puisqu' une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est bornée sur $\mathbb{R}$.) De plus, la majoration déjà vue, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\forall\, t \in \mathbb{R} \quad |f(t).g(x-t)| \leqslant \|g\|_\infty.f(t)$ donne par le théorème de la moyenne que

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x-t)\,dt\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\|g\|_\infty\,dt = \|g\|_\infty \quad ,$$

donc $(f*g)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
Appliquons le théorème de Fubini à la fonction $F(x,t) = f(t).g(x-t) \geqslant 0$:
l'hypothèse *1]* du théorème est acquise par les deux majorations $F(x,t) \leqslant \|g\|_\infty f(t)$ et $F(x,t) \leqslant \|f\|_\infty g(x-t)$, puisque les deux fonction f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$;
comme $g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, par translation on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x-t)\,dx = f(t) \quad ,$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc l'hypothèse *3]* est satisfaite. Donc le théorème de Fubini s'applique et donne, en poursuivant le calcul ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,t)\,dt\Big)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,t)\,dx\Big)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \quad .
\end{aligned}$$

Donc $f*g$ est bien dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Partie II

Q4 A la question **Q3** on a montré par le théorème de la moyenne la majoration $\forall x \in \mathbb{R} \quad |(f*u)(x)| \leqslant \|u\|_\infty$. Puisque le *sup* est inférieur au majorant, cela donne bien l'inégalité

$$\|T_f(u)\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty \quad .$$

Q5 Vu la commutativité démontrée question **Q1** et l'assiciativité admise, on peut écrire :

$$T_fT_g(u) = f*(g*u) = (f*g)*u = (g*f)*u = g*(f*u) = TgTf(u) \quad .$$

Q6 Comme T_f est linéaire, et par commutativité, on a :

$$\begin{aligned} T_{f_1}T_{f_2}(u) - T_{g_1}T_{g_2}(u) &= T_{f_1}\big(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\big) + (T_{f_1} - T_{g_1})\big(T_{g_2}(u)\big) \\ &= T_{f_1}\big(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\big) + T_{g_2}\big(T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)\big) \quad . \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire sur les normes $\| \ . \ \|_\infty$ et la question **Q4**, on en déduit :

$$\|T_{f_1}T_{f_2}(u) - T_{g_1}T_{g_2}(u)\|_\infty \leqslant \|T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\|_\infty + \|T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty \quad .$$

Q7 L'inégalité est triviale pour $n = 1$.
Par associativité, on a pour tout $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et tout $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $T_fT_g(u) = (f*g)*u = T_{f*g}(u)$, d'où $(T_f)^2 = T_{f^{*2}}$, et plus généralement par récurrence $(T_f)^n = T_{f^{*n}}$. Si maintenant dans l'inégalité de la question **Q6** précédente on remplace f_1 par f , g_1 par g , et f_2 par f^{n-1} , g_2 par g^{n-1} , on obtient :

$$\|T_{f^{*n}}(u) - T_{g^{*n}}(u)\|_\infty \leqslant \|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty + \|T_{f^{*(n-1)}}(u) - T_{g^{*(n-1)}}(u)\|_\infty \quad ,$$

d'où l'inégalité demandée clairement par récurrence.

Partie III

Q8 g_h est positive, continue sur $\mathbb{R}$ par composition des fonctions continues exponentielle et carré, et bornée par $\dfrac{1}{h\sqrt{2\pi}}$. Son intégrale sur $\mathbb{R}$ s'obtient en faisant le changement de variable $x \mapsto t = x/h$ dans l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2h^2}}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)\, dt = 1 \quad ,$$

puisqu'on admet que $g_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Donc g_h est bien une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
Les intégrales demandées sont bien (absolument) convergentes, puisque $g_h(x)$ est négligeable devant toute puissance $\dfrac{1}{x^n}$ quand $x \to \pm\infty$. La première intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x.g_h(x)\, dx$ est nulle comme intégrale d'une fonction impaire.
Pour la deuxième intégrale, on procède à une intégration par parties, sachant qu'une primitive de $x.g_h(x)$ est $-h\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2h^2}} = -h^2.g_h(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_h(x)\, dx = \Big[-xh^2 g_h(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} h^2 g_h(x)\, dx = h^2 \quad .$$

Q9 On a déjà remarqué que l'égalité $\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^n = T_{\left(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}\right)^{*n}}$ était vraie par associativité de l'opérateur $*$. De plus, d'après ce qui est admis, $g_h * g_h = g_{h\sqrt{2}}$, et par récurrence, si on admet la formule $(g_h)^{*(n-1)} = g_{h\sqrt{n-1}}$, alors

$$(g_h)^{*n} = g_h * (g_h)^{*(n-1)} = g_h * g_{h\sqrt{n-1}} = g_{\sqrt{h^2+(n-1)h^2}} = g_{h\sqrt{n}} \quad .$$

En remplaçant h par $\dfrac{h}{\sqrt{n}}$, on en déduit bien que

$$\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^n = T_{\left(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}\right)^{*n}} = g_h \quad .$$

Partie IV

Q10 Pour $k=1$: $\left(\frac{d}{dx}g_h\right)(x) = -\frac{x}{h^3\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{x^2}{2h^2}}$, d'où l'existence de $P_{1,h}(x) = -\frac{x}{h^3\sqrt{2\pi}}$ de degré 1 .

Si on suppose l'égalité $\left(\frac{d^k}{dx^k}g_h\right)(x) = P_{k,h}(x)e^{-\dfrac{x^2}{2h^2}}$, avec $P_{k,h}$ de degré k , alors par une dérivation supplémentaire on obtient :

$$\left(\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}g_h\right)(x) = \left(-\frac{x}{h^2}P_{k,h}(x) + P'_{k,h}(x)\right)e^{-\dfrac{x^2}{2h^2}} \quad ,$$

d'où l'existence d'un polynôme $P_{k+1,h}(x) = -\frac{x}{h^2}P_{k,h}(x) + P'_{k,h}(x)$ de degré $1+deg(P_{k,h}) = k+1$, cqfd.

Q11 La fonction $u \mapsto P_{h,k}(u).e^{-\dfrac{u^2}{4h^2}}$ est continue et admet, par croissances comparées, une limite nulle quand $u \to \pm\infty$. Elle est donc dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et par conséquant bornée sur $\mathbb{R}$. Si on appelle M un majorant sur $\mathbb{R}$ de $\left|P_{h,k}(u).e^{-\dfrac{u^2}{4h^2}}\right|$ (qui ne dépend que de h et de k), on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall t \in \mathbb{R} \quad \left|P_{h,k}(x-t).e^{-\dfrac{(x-t)^2}{2h^2}}\right| \leqslant M.e^{-\dfrac{(x-t)^2}{4h^2}} \quad .$$

On suppose maintenant $x \in [-a,a]$. Pour $t \in [-2a,2a]$, on peut majorer la dernière exponentielle ci-dessus par 1 ; et pour $|t| \geqslant 2a$, comme alors $|x-t| \geqslant \big||t|-a\big|$, par $e^{\dfrac{(|t|-a)^2}{2h^2}}$, cette dernière fonction étant intégrable en $\pm\infty$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ par exemple. On a donc l'existence d'une fonction c.p.m. positive $\phi_k(t)$ majorante définie par :

$$\phi_k(t) : t \mapsto \begin{cases} M & \text{si } t \in [-2a,2a] \\ M.e^{\dfrac{(|t|-a)^2}{2h^2}} & \text{sinon} \end{cases} \quad .$$

Q12 On a que $T_{g_h}(u) = g_h * u = u * g_h = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(t).g_h(x-t)\,dt$ est une intégrale à paramètre qu'on peut dériver sous le signe $\displaystyle\int$. En effet, l'intégrande se dérive à t fixé en $u(t)P_{1,h}(x-t)e^{\dfrac{(x-t)^2}{2h^2}}$ qui est bien continue de t et de x et qui est dominée sur tout compact $[-a,a]$ par la fonction c.p.m. intégrable $\|u\|_\infty.\varphi_1(t)$. Ceci prouve que $T_{g_h}(u)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec

$$T_{g_h}(u)'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t).P_{1,h}(x-t)e^{\dfrac{(x-t)^2}{2h^2}} \quad .$$

Mais ce même raisonnement peut se poursuivre indéfiniment, vue la domination démontrée en question **Q11**, et prouve que la fonction $T_{g_h}(u)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(T_{g_h}(u)(x)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t).P_{k,h}(x-t)e^{\dfrac{(x-t)^2}{2h^2}} \quad .$$

Q13 On va utiliser la question **Q2**. soit ψ la fonction $u \mapsto P_{k,h}(u)e^{\dfrac{u^2}{2h^2}}$. La question ci-dessus prouve l'égalité $\frac{d^k}{dx^k}\left(T_{g_h}(u)(x)\right) = (u*\psi)(x) = (\psi*u)(x)$. La fonction $x \mapsto |\psi(x)|$ n'est pas a priori dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, mais elle est continue, et, par croissance comparée, négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $\pm\infty$, et est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme $|u|$ reste dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, on peut appliquer l'inégalité de la moyenne à l'intégrale donnant $(\psi*u)(x)$, ce qui donne

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}\left(T_{g_h}(u)(x)\right)\right| \leqslant (|\psi|*|u|)(x) \quad .$$

De plus, quitte à diviser $|\psi|$ par son intégrale J sur $\mathbb{R}$, on peut maintenant appliquer la question **Q2** : $(|\psi|*|u|)(x) = J.(\frac{1}{J}|\psi|*|u|)(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit par comparaison que $T_{g_h}(u)$ est dans $\mathcal{C}^0_\infty(\mathbb{R})$.

Q14 Par le changement de variables $t \mapsto u = \dfrac{t}{h}$, on a

$$\int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\, dt = \int_{-\infty}^{-\alpha/h} g_1(u)\, du \quad .$$

Or, quand $h \to 0^+$, on a $-\alpha/h \to -\infty$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g_1(u)\, du$ converge. Donc, par composition de limites, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha/h} g_1(u)\, du \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

De même, $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t)\, dt = \int_{\alpha/h}^{+\infty} g_1(u)\, du \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Q15 Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)\, dt = 1$, on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé :

$$\big(T_{g_h}(u)\big)(x) - u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)\big(u(x-t) - u(x)\big)\, dt \quad ,$$

d'où par inégalité de la moyenne,

$$\Big|\big(T_{g_h}(u)\big)(x) - u(x)\Big| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)\big|u(x-t) - u(x)\big|\, dt \quad .$$

Pour $\alpha > 0$ à déterminer, on coupe la dernière intégrale en 3 : une intégrale I_1 sur $]-\infty, a]$, une intégrale I_2 sur $[-\alpha, \alpha]$, et une intégrale I_3 sur $[\alpha, +\infty[$. On majore I_1 et I_3 par l'inégalité $\big|u(x-t) - u(x)\big| \leqslant 2\|u\|_\infty$, d'où une première inégalité

$$(1) \quad I_1 + I_3 \leqslant 2\|u\|_\infty \Big(\int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\, dt + \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t)\, dt\Big) \quad .$$

On majore I_2 en majorant $\big|u(x-t) - u(x)\big|$ par δ_α , où $\delta_\alpha = \underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \big| |x-y|\leqslant\alpha}{\mathrm{Sup}} \big|u(x) - u(yx)\big|$ (ce *Sup* existe d'après la propriété de continuité uniforme admise dans l'énoncé). On écrit :

$$(2) \quad I_2 \leqslant \delta_\alpha \Big(\int_{-\alpha}^{+\alpha} g_h(t)\, dt\Big) \leqslant \delta_\alpha \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)\, dt\Big) = \delta_\alpha \quad .$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. D'après l'énoncé, il existe un $\alpha > 0$ tel que $\delta_\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour cet α-là, il existe d'après la question **Q14** un $h_0 > 0$ tel que $0 < h < h_0 \Longrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\, dt + \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{2\|u\|_\infty}$. Alors, par les inégalités (1) et (2) , on aura :

$$0 < h < h_0 \Longrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} \Big|\big(T_{g_h}(u)\big)(x) - u(x)\Big| < \varepsilon \Longrightarrow \big\|T_{g_h}(u) - u\big\|_\infty \leqslant \varepsilon \quad ,$$

et ceci traduit bien que $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \big\|T_{g_h}(u) - u\big\|_\infty = 0$.

Q16 Soit $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ quelconque et $\varepsilon > 0$ donné. En écrivant $T_{f_n}(u) = T_{f_n}T_{g_h}(u) + T_{f_n}\big(u - T_{g_h}(u)\big)$, et de même $T_f(u) = T_f T_{g_h}(u) + T_f\big(u - T_{g_h}(u)\big)$, on a par inégalité triangulaire puis par **Q4** :

$$\begin{aligned}\big\|T_{f_n}(u) - T_f(u)\big\|_\infty &\leqslant \big\|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_f T_{g_h}(u)\big\|_\infty + \Big\|T_{f_n}\big(T_{g_h}(u) - u\big)\Big\|_\infty + \Big\|T_f\big(T_{g_h}(u) - u\big)\Big\|_\infty \\ &\leqslant \big\|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_f T_{g_h}(u)\big\|_\infty + 2\big\|T_{g_h}(u) - u\big\|_\infty \quad .\end{aligned}$$

Par **Q15** on peut choisir $h > 0$ tel que $\big\|T_{g_h}(u) - u\big\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Or, pour cet h-là, on sait que $T_{g_h}(u)$ est une fonction de $\mathcal{C}_0^\infty$, donc par hypothèse il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant N \Longrightarrow \big\|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_f T_{g_h}(u)\big\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \quad .$$

Finalement, on a bien que $n \geqslant N \Longrightarrow \big\|T_{f_n}(u) - T_f(u)\big\|_\infty < \varepsilon$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \big\|T_{f_n}(u) - T_f(u)\big\|_\infty = 0$, ceci pour toute fonction $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Donc f_n converge faiblement vers f .

Q17 Par Taylor-Young au voisinage de $t=0$, on a que $u(x-t)=u(x)-tu'(x)+\frac{t^2}{2}u''(x)+o(t^2)$, donc

$$\frac{u(x-t)-u(x)+tu'(x)}{t^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{u''(x)}{2} \quad .$$

Comme on admet que $f_n^{\#}\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a déjà que $-\frac{1}{2}u''(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(-\frac{1}{2}u''(x)\Big).f_n^{\#}(t)\,dt$.
De même, puisque $f_n\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$,

$$nu(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} nu(x)f_n(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(x)}{t^2}f_n^{\#}(t)\,dt \quad .$$

Puis par définition de l'opératuer T :

$$nT_{f_n}(u)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} nu(x-t)f_n(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(x-t)}{t^2}f_n^{\#}(t)\,dt \quad .$$

Enfin, par un changement de variable $u=\sqrt{n}.t$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{tu'(x)}{t^2}f_n^{\#}(t)\,dt=u'(x)\int_{-\infty}^{+\infty} ntf_n(t)\,dt=\sqrt{n}.u'(x)\int_{-\infty}^{+\infty} uf(u)\,du=0 \quad ,$$

par hypothèse sur f . En additionnant ces trois égalités, on arrive bien à

$$n\Big(T_{f_n}(u)(x)-u(x)\Big)-\frac{1}{2}u''(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{u(x-t)-u(x)+tu'(x)}{t^2}-\frac{1}{2}u''(x)\right)f_n^{\#}(t)\,dt \quad .$$

Q18 Notons $\psi(x,t)$ la fonction apparaissant dans l'intégrande de la question précédente :

$$\psi(x,t)=\frac{u(x-t)-u(x)+tu'(x)}{t^2}-\frac{u''(x)}{2} \quad .$$

Reprenons le début de la question précédente **Q17** en utilisant cette fois Taylor-Lagrange. Comme $u\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\|u'''\|_\infty$ existe, d'où :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad |\psi(x,t)|=\left|\frac{u(x-t)-u(x)+tu'(x)}{t^2}-\frac{u''(x)}{2}\right|\leqslant\frac{|t|}{6}\|u'''\|_\infty \quad .$$

Donc, pour $\alpha>0$ donné à déterminer, si on se limite à intégrer $\psi(x,t)f_n^{\#}(t)$ pour $t\in[-\alpha,a]$, on aura par l'inégalité de la moyenne

$$\left|\int_{-\alpha}^{+\alpha}\psi(x,t)f_n^{\#}(t)\,dt\right|\leqslant\|u'''\|_\infty\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\alpha}{6}f_n^{\#}(t)\,dt\leqslant\|u'''\|_\infty\frac{\alpha}{6} \quad .$$

Puis, pour $|t|\geqslant\alpha$, on a la majoration $\forall\,x\in\mathbb{R}\ \ |\psi(x,t)|\leqslant\frac{2\|u\|_\infty}{\alpha^2}+\frac{\|u'\|_\infty}{\alpha}+\frac{1}{2}\|u''\|_\infty=M_\alpha$, constante qui ne dépend que de de α . Or, comme à la question **Q14**, on a que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{|t|\geqslant\alpha}f_n^{\#}(t)\,dt=0$. En effet, par exemple, avec le changement de variables $u=\sqrt{n}.t$,

$$\int_{-\infty}^{-\alpha}f_n^{\#}(t)\,dt=\int_{-\infty}^{-n\alpha}t^2f(t)\,dt \quad ,$$

or l'intégrale converge en $-\infty$ et $-n\alpha\to-\infty$. De même,

$$\int_{\alpha}^{+\infty}f_n^{\#}(t)\,dt=\int_{n\alpha}^{+\infty}t^2f(t)\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

On en déduit que $\displaystyle\int_{|t|\geqslant\alpha} \psi(x,t) f_n^{\#}(t)\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Pour $\varepsilon > 0$ donné quelconque, on commence par choisir $\alpha >$ pour que $\|u'''\|_\infty \dfrac{\alpha}{6} < \frac{\varepsilon}{2}$, puis, pour cet α-là, il existe un N à partir duquel l'intégrale sur $]-\infty,-\alpha]\bigcup[\alpha,+\infty[$ de $\psi(x,t).f_n^{\#}(t)$ soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, on aura bien les implications

$$n \geqslant N \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \left|\int_{\infty}^{\infty} \psi(x,t).f_n^{\#}(t)\,dt\right| < \varepsilon \Longrightarrow \left\|n\big(T_{f_n}(u)-u\big) - \frac{1}{2}u''\right\|_\infty \leqslant \varepsilon \quad , cqfd.$$

Q19 On remarque que g_1 vérifie les mêmes hypothèses que f , et que suivant la notation de l'énoncé, $g_{1n} = g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}$.
D'après les questions **Q8** et **Q7** on a alors :

$$\big\|(T_{f_n})^n(u) - T_{g_1}(u)\big\|_\infty = \big\|(T_{f_n})^n(u) - (T_{g_{1n}})^n(u)\big\|_\infty \leqslant n\big\|T_{f_n}(u) - T_{g_{1n}}(u)\big\|_\infty \quad .$$

Mais la question **Q18** peut s'appliquer à f et à g_1 , d'où par inégalité triangulaire et somme de limites,

$$n\big\|T_{f_n}(u) - T_{g_{1n}}(u)\big\|_\infty \leqslant \left\|n\big(T_{f_n}(u)-u\big) - \frac{1}{2}u''\right\|_\infty + \left\|n\big(T_{g_{1n}}(u)-u\big) - \frac{1}{2}u''\right\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

On a bien en définitive la limite nulle demandée.
On conclut par la question **Q16** qui étend le résultat à toutes les fonctions $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, et comme de plus $T^n(f_n) = T_{f_n^{*n}}$, on a bien la convergence faible de f_n^{*n} vers g_1 ■

⁕
⁕ ⁕