Centrale 2011. Option MP. Mathématiques I.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

I. Étude préliminaire.

I.A - *Convergence des séries de Riemann.*

I.A.1) Immédiat par positivité de l'intégration. $\square$

I.A.2) Si $\alpha \leqslant 0$ la série diverge grossièrement.
Si $0 < \alpha \leqslant 1$ la question précédente montre que $S_n(\alpha) \underset{\text{DEF}}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha} \geqslant \displaystyle\int_1^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}\,t}{t^\alpha}$ en considérant $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ qui est décroissante sur $[1, +\infty[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}\,t}{t^\alpha} = +\infty$ il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\alpha) = +\infty$ et la série diverge.
Si $\alpha > 1$ on a de même $S_n(\alpha) \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^{n} \dfrac{\mathrm{d}\,t}{t^\alpha} \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}\,t}{t^\alpha} = 1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$ donc la série converge en tant que série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées (et en outre $S(\alpha) \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha-1}$).
En résumé la série converge si et seulement si $\alpha > 1$. $\square$

I.A.3) L'inégalité $1 \leqslant S(\alpha)$ est évidente et l'inégalité $S(\alpha) \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha-1}$ a été établie ci-dessus. $\square$

I.B - *Première étude asymptotique du reste.*

I.B.1) En sommant les inégalités de la question I.A.1) de $k = n+1$ à N puis en faisant tendre N vers $+\infty$ (licite vu le convergence des trois menbres) on obtient :
$\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant R_n(\alpha) \leqslant \dfrac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$ donc $R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + r_n(\alpha)$
avec $0 \leqslant r_n(\alpha) \leqslant \dfrac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = f(n) - f(n-1) \leqslant \operatorname*{Sup}\limits_{t\in[n-1,n]} |f'(t)| = \dfrac{1}{(n-1)^\alpha} \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$
en notant $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(1-\alpha)x^\alpha}$
Ainsi on a bien $R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\big(\dfrac{1}{n^\alpha}\big)$ $\square$

I.B.2) La formule de Taylor appliquée à la fonction f définie ci-dessus de k vers $k+1$ fournit :
$f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$ avec$A_k = \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{(k+1-t)^2}{2} \cdot \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}\,t$
Or pour $t \in [k, k+1]$ on a $(k+1-t)^2 \leqslant 1$ et $\dfrac{1}{t^{\alpha+2}} \leqslant \dfrac{1}{k^{\alpha+2}}$ donc par positivité de l'intégration on a bien :
$f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k \quad (1) \qquad$ avec $0 \leqslant A_k \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+2)}{k^{\alpha+2}}$ $\square$

I.B.3) Il découle de l'inégalité ci-dessus que la série $\sum A_k$ converge. En sommant alors l'égalité (1) pour k de n à N puis en faisant tendre N vers $+\infty$ (bien licite car tous les termes convergent) on obtient :
$-f(n) = R_n(\alpha) - \dfrac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) + \sum\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$ donc $R_n(\alpha) = -f(n) + \dfrac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) - \sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$.
Or par la question I.B.1) $R_n(\alpha+1) = \dfrac{1}{\alpha n^\alpha} + O\big(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\big)$ et $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} A_k \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1}{2} R_n(\alpha+2) = O\big(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\big)$.
Ainsi $R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \dfrac{1}{2n^\alpha} + O\big(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\big)$ $\square$

II. Formule de Taylor et nombres de Bernoulli.

II.A - *Nombres de Bernoulli.*

II.A.1) Avec les notations de l'énoncé il vient pour tout entier $p \geqslant 1$, toute fonction f et toute suite (a_n) :
$\sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k!} g^{(k)} = \sum\limits_{k=1}^{p} \sum\limits_{q=0}^{p-1} \dfrac{a_q}{k!} f^{(q+k)} = a_0 f' + \sum\limits_{r=2}^{2p-1} \alpha_r f^{(r)}$ avec $\alpha_r = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{a_{r-k}}{k!}$
Donc la suite (a_n) convient si et seulement si $a_0 = 1$ et $\alpha_r = 0$ pour $2 \leqslant r \leqslant p$
c'est à dire si et seulement si $a_0 = 1$ et $\sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{a_{r-k}}{k!} = 0$ pour $2 \leqslant r \leqslant p$ soit encore puisque p est quelconque

si et seulement si $a_0=1$ et $\sum_{k=1}^{r}\dfrac{a_{r-k}}{k!}=0$ pour tout $r\geqslant 2$ (1) c'est à dire encore

si et seulement si $a_0=1$ et $\sum_{k=1}^{p+1}\dfrac{a_{p+1-k}}{k!}=0$ pour tout $p\geqslant 1$ (changement $r=p+1$) soit encore

si et seulement si $a_0=1$ et $a_p=-\sum_{k=2}^{p+1}\dfrac{a_{p+1-k}}{k!}$ pour tout $p\geqslant 1$ (2)

Or la relation (2) définit par itération une unique suite d'où la conclusion. $\square$

II.A.2) Les égalités demandées ont été établies ci-dessus. $\square$

On obtient en particulier $a_1=-\dfrac{1}{2}$ et $a_2=\dfrac{1}{12}$ $\square$

Le prédicat $\mathcal{P}_p=$ « $|a_p|\leqslant 1$ » est vrai au rang 0 et en supposant qu'il soit vrai jusqu'au rang $p-1$ avec $p\geqslant 1$ il vient d'après (2) que $|a_p|\leqslant\sum_{k=2}^{p+1}\dfrac{1}{k!}\leqslant\sum_{k=2}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}=e-2<1$ ce qui prouve que $\mathcal{P}_p$ est vrai.

Ainsi $|a_p|\leqslant 1$ pour tout entier p. $\square$

II.A.3)

a) Comme $|a_p|\leqslant 1$ le rayon de convergence de $\sum a_p z^p$ est supérieur ou égal à 1. $\square$

b) Pour $|z|<1$ les deux séries $\sum_{p=0}^{+\infty}a_p z^p$ et $\sum_{q=1}^{+\infty}\dfrac{z^p}{q!}$ convergent absolument donc leur produit de Cauchy converge vers le produit des sommes donc $(e^z-1)\varphi(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n z^n$ avec :

$\alpha_0=a_0=1$ et pour $n\geqslant 2$: $a_n=\sum_{q=1}^{n}\dfrac{a_{n-q}}{q!}=0$ d'après (1) dans la question II.A.1)

Ainsi $(e^z-1)\varphi(z)=z$ pour tout z tel que $|z|<1$ et comme $e^z=1$ si et seulement $z=2ik\pi$ il vient que $\varphi(z)=\dfrac{z}{e^z-1}$ pour z non nul tel que $|z|<1$ $\square$

c) Il en résulte que pour x non nul tel que $|x|<1$ on a $\varphi(x)-a_1x=\varphi(x)+\dfrac{x}{2}=\dfrac{x(e^x+1)}{e^x-1}$ et on vérifie immédiatement que cette fonction est paire.

Par unicité du développement en série entière de $\varphi(x)-a_1x$ il vient que $a_{2k+1}=0$ pour $k\geqslant 1$. $\square$

Par la formule (1) ou par développement limité à l'ordre 4 de $\dfrac{x}{e^x-1}$ en 0 il vient que $a_4=\dfrac{-1}{720}$ $\square$

II.B - *Formule de Taylor.*

II.B.1) g étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, la formule de Taylor à l'ordre $2p$ de k vers $k+1$ fournit avec $p\geqslant 1$ fixé :

$g(k+1)-g(k)=\sum_{k=1}^{2p}\dfrac{g^{(k)}(k)}{k!}+r(k)$ avec $r(k)=\dfrac{1}{(2p)!}\displaystyle\int_k^{k+1}(k+1-t)^{2p}g^{(2p+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t$

Donc en tenant compte de la question II.A :

$g(k+1)-g(k)=f'(k)+R(k)$ avec $R(k)=\sum_{l=1}^{2p-1}b_{l,2p}f^{(2p+l}(k)+r(k)$

Or $f^{(q)}(x)=(-1)^{q-1}\dfrac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+q-2)}{x^{\alpha+q-1}}=O\big(\dfrac{1}{x^{\alpha+2p}}\big)$ au voisinage de $x=+\infty$ pour $q\geqslant 2p+1$

Donc $\sum_{l=1}^{2p-1}b_{l,2p}f^{(2p+l)}(k)=O\big(\dfrac{1}{k^{\alpha+2p}}\big)$ par sommation un nombre de fois indépendant de k de $O\big(\dfrac{1}{k^{\alpha+2p}}\big)$

De même $|r_k|\leqslant\dfrac{1}{(2p)!}\sup_{t\in[k,k+1]}|g^{(2p+1)}(t)|\leqslant\dfrac{1}{(2p)!}\sum_{j=0}^{2p-1}|a_j|\cdot|f^{(2p+1+j)}(k)|\leqslant\sum_{k=0}^{2p-1}|f^{(2p+1+j)}(k)|=O\big(\dfrac{1}{k^{\alpha+2p}}\big)$

En conclusion $g(k+1)-g(k)=f'(k)+R(k)$ (3) avec $R(k)=O\big(\dfrac{1}{k^{\alpha+2p}}\big)$ d'où l'existence de A. $\square$

II.B.2) Pour $p=1$ la formule proposée n'est autre que celle établie en I.B.1). Supposons désormais $p\geqslant 2$.

Comme $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$ (puisque $\alpha>1$) la série $\sum\big(g(k+1)-g(k)\big)$ converge et

$\sum_{k=n}^{+\infty}\big(g(k+1)-g(k)\big)=-g(n)=-\sum_{k=0}^{2p-1}a_kf^{(k)}(n)=-\sum_{k=0}^{2p-2}a_kf^{(k)}(n)$ car $a_{2p-1}=0$ puisque $p\geqslant 2$.

Comme $R(k)=O\big(\dfrac{1}{k^{\alpha+2p}}\big)$ la série $\sum R(k)$ converge et le principe de sommation de la relation O dans le cas de la convergence montre que $\sum_{k=n}^{+\infty}R(k)=O\Big(\sum_{k=n}^{+\infty}\dfrac{1}{k^{\alpha+2p}}\Big)=O\big(\dfrac{1}{n^{\alpha+2p-1}}\big)$ par la question I.B.1)

Ainsi en sommant les égalités (3) pour $k \geqslant n$ on obtient :
$R_n(\alpha) = -f(n) + \dfrac{1}{2}f'(n) - \sum\limits_{k=1}^{p-1} a_{2k} f^{(2k)}(n) + O\big(\dfrac{1}{n^{\alpha+2p-1}}\big)$ pour tout entier $p \geqslant 2$ $\square$

II.B.3) Pour $\alpha = 3$ on obtient compte tenu des calculs précédents :
$R_n(3) = \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{2n^3} + \dfrac{1}{4n^4} - \dfrac{1}{12n^6} + O\big(\dfrac{1}{n^8}\big)$ $\square$

III. Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

III.A -*Polynômes de Bernoulli.*

III.A.1) ***Propriétés élémentaires.***

a) Si A_n est déterminé de manière unique alors A_{n+1} aussi car la relation $A'_{n+1} = A_n$ le détermine à une constante additive près fixée par la relation $\displaystyle\int_0^1 A_{n+1}(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$.
Comme $A_0 = 1$ est déterminé, la suite (A_n) est bien déterminée de manière unique. $\square$

Il est immédiat que A_n est de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{1}{n!}$. $\square$

Un calcul immédiat fournit $A_1 = X - \dfrac{1}{2}$, $A_2 = \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X}{2} + \dfrac{1}{12}$ et $A_3 = \dfrac{X^3}{6} - \dfrac{X^4}{4} + \dfrac{X}{12}$ $\square$

b) On vérifie immédiatement que la suite (B_n) définie par $B_n(X) = (-1)^n A_n(1-X)$ vérifie les relations de définition de la suite (A_n). $\square$

c) Pour $n \geqslant 2$ on a avec les relations de définition de la suite (A_n) et le résultat précédent :
$A_n(1) - A_n(0) = \displaystyle\int_0^1 A'_n(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 A_{n-1}(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$ puisque $n-1 \geqslant 1$ $\square$
$A_{2n-1}(0) = -A_{2n-1}(1) = -A_{2n-1}(0)$ car $2n-1 \geqslant 3 \geqslant 2$ donc $A_{2n-1}(0) = 0$ $\square$

d) La relation $A_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k \dfrac{X^{n-k}}{(n-k)!}$ est vraie au rang $n=0$. En supposant qu'elle soit vraie au rang n il vient par primitivation $A_{n+1}(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k \dfrac{X^{n+1-k}}{(n+1-k)!} + A_{n+1}(0) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} c_k \dfrac{X^{n+1-k}}{(n+1-k)!}$ ce qui établit la relation pour tout entier n. $\square$

Pour $n \geqslant 1$ on a $n+1 \geqslant 2$ donc $A_{n+1}(1) = A_{n+1}(0) = c_{n+1}$ et l'expression de A_{n+1} ci-dessus fournit alors $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{c_k}{(n+1-k)!} = 0$ $\square$

e) Ainsi la suite (c_n) est-elle définie par $c_0 = 1$ puis par $c_n = -\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{c_k}{(n+1-k)!} = -\sum\limits_{i=2}^{n+1} \dfrac{c_{n+1-i}}{i!}$ pour $n \geqslant 1$ ce qui est exactement la définition de la suite (c_n) (question II.A.2) $\square$

III.A.2) ***Fonction génératrice.***

a) On a $|c_n| = |a_n| \leqslant 1$ par II.A.2). Donc pour $t \in [-1,1]$ il vient $|A_n(t)| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \leqslant e$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum A_n(t) z^n$ est au moins égal à 1. $\square$

b) Fixons z tel que $|z| < 1$ et notons $u_n(t) = A_n(t) z^n$ et $\psi(t) = f(t,z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$. Alors :

1) la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ converge simplement sur $[0,1]$
2) u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ avec $u'_0(t) = 0$ et $u'_n(t) = A_{n-1}(t) z^n$ pour $n \geqslant 1$
3) la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u'_n(t)$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$ car $|u'_n(t)| = |A_{n-1}(t)| \cdot |z|^n \leqslant e|z|^n$ qui est bien le terme général d'une série convergente puisque $|z| < 1$

Donc ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et dérivable terme à terme de sorte que $\psi'(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_{n-1}(t) z^n = z\psi(t)$.
Ainsi ψ est solution sur $[0,1]$ de l'équation différentielle $y' = zy$ de sorte que $\psi(t) = \lambda(z) e^{zt}$.
Comme $\psi(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \varphi(z)$, on obtient d'après II.A.3.b) que :
$f(t,z) = \dfrac{z e^{tz}}{e^z - 1}$ pour $t \in [0,1]$ et $|z| < 1$ avec $z \neq 0$ $\square$

c) Légère erreur d'énoncé : on suppose dans cette question $0 < |z| < 2\pi$ de sorte que $e^z - 1$ soit non nul.

Alors $\dfrac{ze^{z/2}}{e^z-1} + \dfrac{z}{e^z-1} = \dfrac{z(e^{z/2}+1)}{e^z-1} = \dfrac{z}{e^{z/2}-1}$ $\square$

Considérons désormais z quelconque tel que $0 < |z| < 1 < 2\pi$ de sorte qu'on puisse utiliser le résultat précédent, la question b) ci-dessus ainsi que la question II.A.3.b)

La question b) fournit avec $t = \dfrac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(\frac{1}{2})z^n = \frac{ze^{z/2}}{e^z-1} = 2\frac{z/2}{e^{z/2}-1} - \frac{z}{e^z-1} = 2\varphi(\frac{z}{2}) - \varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \text{ avec } b_n = \Big(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\Big)a_n.$$

Cette relation est encore vrai en 0 car elle se réduit alors à 1=1. Ainsi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(\frac{1}{2})z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \quad \forall z \in D(0,1)$

Par unicité du développement en série entière on obtient $A_n(\dfrac{1}{2}) = b_n = \Big(\dfrac{1}{2^{n-1}} - 1\Big)a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\square$

III.A.3) ***Variations des polynômes de Bernoulli.***

a) Soit le prédicat $\mathcal{P}(k) =$ « A_{4k+2}, A_{4k+3}, A_{4k+4} et A_{4k+5} ont les variations indiquées »

- $\mathcal{P}(0)$ est vrai.

- En effet $A_2(x) = \dfrac{1}{2}\big(x^2 - x + \dfrac{1}{6}\big)$ donc A_2 a les variations requises.

- Comme $A_3' = A_2$, A_3 a bien les variations requises car en outre $A_3(0) = A_3(1) = 0$ par III.A.1.c) et $A_3(\dfrac{1}{2}) = 0$ par III.A.2.c) puisque $a_3 = 0$ par II.A.3.c).

- Comme $A_4' = A_3$ il vient que A_4 croît sur $[0, \dfrac{1}{2}]$ puis décroît sur $[\dfrac{1}{2}, 1]$. Supposons $A_4(0) = A_4(1) \geqslant 0$. Alors A_4 est positive ou nulle sur $[0,1]$ et comme elle est continue d'intégrale nulle il vient A_4 nulle sur $[0,1]$ donc $A_4' = A_3$ aussi ce qui n'est pas. Ainsi $A_4(0) = A_4(1) < 0$. Supposons désormais $A_4(\dfrac{1}{2}) \leqslant 0$. Alors A_4 est négative ou nulle sur $[0,1]$ d'intégrale nulle. Comme ci-dessus on en déduit A_4 donc A_3 nulle sur $[0,1]$ ce qui n'est pas. Donc $A_4(\dfrac{1}{2}) > 0$.

- De $A_5' = A_4$ on en déduit que A_5 a les variations requises car, exactement de la même manière que pour A_3 (comme 5 est impair) on a $A_5(0) = A_5(1) = A_5(\dfrac{1}{2}) = 0$.

- Supposons $\mathcal{P}(k)$ vrai pour $k \geqslant 0$.

- Comme $A_{4k+6}' = A_{4k+5}$ il vient que A_{4k+6} décroît sur $[0, \dfrac{1}{2}]$ puis croît sur $[\dfrac{1}{2}, 1]$. Si $A_{4k+6}(\dfrac{1}{2}) \geqslant 0$ alors exactement comme ci-dessus par positivité "améliorée" de l'intégration on en déduit que A_{4k+6} donc A_{4k+5} est nulle sur $[0,1]$ ce qui n'est pas. Donc $A_{4k+6}(\dfrac{1}{2}) < 0$. Puis on prouve de même par l'absurde que $A_{4k+6}(0) = A_{4k+6}(1) > 0$.

- Exactement le même raisonnement que celui fait pour A_3 (resp. A_4, A_5) prouve alors successivement que A_{4k+7}, A_{4k+8} et A_{4k+9} ont les variations requises.

- Ainsi les variations des polynômes A_n avec $n \geqslant 2$ se trouvent bien établies par récurrence. $\square$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $2n \geqslant 2$ donc les variations ci-dessus montrent que $|A_{2n}(x)| \leqslant \max\big(|A_{2n}(0)|, \big|A_{2n}(\dfrac{1}{2})\big|\big)$.

Or $A_{2n}(0) = a_{2n}$ et $\big|A_{2n}(\dfrac{1}{2})\big| < |a_{2n}|$ par III.A.2.c). Donc $|A_{2n}(x)| \leqslant |a_{2n}|$ pour $n \geqslant 1$ et $x \in [0,1]$ $\square$

Par ailleurs $A_{2n+1}(x) = \displaystyle\int_{1/2}^{x} A_{2n}(t)\,\mathrm{d}\,t$ puisque $A_{2n+1}(\dfrac{1}{2}) = 0$ donc, compte tenu du résultat précédent :

$|A_{2n+1}(x)| \leqslant \dfrac{|a_{2n}|}{2}$ pour $n \geqslant 1$ et $x \in [0,1]$ $\square$

III.B - ***Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.***

III.B.1)

a) $f(1) - f(0) = \displaystyle\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}\,t = \Big[A_1(t)f'(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 A_1(t)f''(t)\,\mathrm{d}\,t$ par intégration par parties ce qui prouve que la formule proposée est vraie pour $q = 1$.

En supposant qu'elle soit vraie au rang $q \geqslant 1$ il vient à nouveau par parties que $\int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t = \Big[A_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 A_{q+1}(t) f^{(q+2)}(t)\,\mathrm{d}\,t$ ce qui prouve, en remplaçant le reste intégral par cette valeur dans la formule au rang q vraie par hypothèse de récurrence, que la formule est vraie au rang $q+1$. $\square$

b) En particulier avec $q = 2p+1$ en tenant compte de $A_j(1) = A_j(0) = a_j$, de $a_{2k+1} = 0$ pour $k \geqslant 1$ et de $a_1 = -\dfrac{1}{2}$ on obtient la formule proposée. $\square$

III.B.2) Par application (bien licite) du résultat précédent à la fonction f_k pour $k \geqslant n$ il vient :
$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{2}\big(f'(k) + f'(k+1)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\big(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)\big) - \int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(u) f^{(2p+2)}(u)\,\mathrm{d}\,u$$
par changement de variable dans le reste intégral.
Par sommation de $k = n$ à $k = N$ on obtient :
$$\sum_{k=n}^{N} f'(k) = f(N+1) - f(n) + \frac{1}{2}f'(n) + \frac{1}{2}f'(N+1) + \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\big(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n)\big) + \int_n^{N+1} A_{2p+1}^*(u) f^{(2p+2)}(u)\,\mathrm{d}\,u$$
Or $\Big|A_{2p+1}^*(u) f^{(2p+2)}(u)\Big| = \varepsilon_p \Big|A_{2p+1}^*(u)\Big| f^{(2p+2)}(u)$ avec $\varepsilon_p = \pm 1$ car $f^{(2p+2)}$ est de signe fixe sur $[n, +\infty[$
Donc $\Big|A_{2p+1}^*(u) f^{(2p+2)}(u)\Big| \leqslant \dfrac{1}{2}|a_{2p}| \cdot \varepsilon_p f^{(2p+2)}(u)$ qui est intégrable sur $[n, +\infty[$ puisque $\lim\limits_{u \to +\infty} f^{(2p+1)}(u) = 0$ donc existe bien. Ainsi $A_{2p+1}^*(u) f^{(2p+2)}(u)$ est intégrable sur $[n, +\infty[$ et on prouvé au passage que :
$\left|\int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(u) f^{(2p+2)}(u)\,\mathrm{d}\,u\right| \leqslant \dfrac{|a_{2p}|}{2}\left|f^{(2p+1)}(n)\right|$ $\square$

.

Comme f et toutes ses dérivées tendent vers 0 en $+\infty$ cela prouve que le membre de droite de l'égalité ci-dessus admet une limite lorsque $N \to +\infty$. Ainsi la série $\sum f'(k)$ converge et on on obtient bien :
$$\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \square$$

III.B.3) Il est immédiat de vérifier que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$ avec $\alpha > 1$ satisfait bien les hypothèses de III.B.2) du moins avec $n \geqslant 1$. En lui appliquant la formule ci-dessus au rang $p-1$ on obtient :
$\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p-1} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t) f^{(2p)}(t)\,\mathrm{d}\,t$ ce qui redonne la formule II.B.2) puisque d'après la question précédente le reste intégral est un $O\big(f^{(2p-1)}(n)\big)$ et que $f^{(2p-1)}(n) = O\Big(\dfrac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\Big)$ par un calcul déjà fait. $\square$

IV. *Compléments sur l'erreur.*

IV.A - *Encadrement de l'erreur.*

IV.A.1) On a $\displaystyle\int_0^1 A_n(t) g(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{1/2} A_n(t) g(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^{1/2} A_n(1-t) g(1-t)\,\mathrm{d}\,t$
Si $n \equiv 1 \bmod 4$ ou $n \equiv 3 \bmod 4$ alors $A_n(t) = -A_n(1-t)$ d'après III.A.1.b) donc :
$$\int_0^1 A_n(t) g(t)\ t = \int_0^{1/2} A_n(t)\big(g(t) - g(1-t)\big)\,\mathrm{d}\,t$$
Si $n \equiv 1 \bmod 4$ alors pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $A_n(t) \leqslant 0$ d'après les variations de A_n et $g(t) - g(1-t) \leqslant 0$ puisque g est croissante. Donc $\displaystyle\int_0^1 A_n(t) g(t)\,\mathrm{d}\,t \geqslant 0$.

De même si $n \equiv 3 \bmod 4$ alors $A_n(t) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 A_n(t) g(t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant 0$ $\square$

IV.A.2) D'après III.B.2) et III.B.3) on a $S(\alpha) = \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha) + \widetilde{R}_{n,2p}(\alpha)$ avec $\widetilde{R}_{n,2p}(\alpha) = \displaystyle\int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}\,t$
Or $\widetilde{R}_{n,2p}(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}\,t = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(k+t)\,\mathrm{d}\,t$
Or en notant $g_k : t \longmapsto f^{(2p+2)}(k+t)$ on a $g'(t) = f^{(2p+3)}(k+t)$ positive car $2p+3$ est impair.
On peut donc appliquer le résultat précédent qui montre que si p est pair alors $\widetilde{R}_{n,2p}(\alpha) \geqslant 0$ et $\widetilde{R}_{n,2p}(\alpha) \leqslant 0$ sinon. En particulier on a bien les deux inégalités proposées par l'énoncé. $\square$

Si $q = 2p$ alors :
$\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2q}(\alpha)\right| \leqslant \left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p}(\alpha)\right| \leqslant \left|\widetilde{S}_{n,4p+2}(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p}(\alpha)\right| = \left|a_{4p+2}f^{(4p+2)}(n)\right| = \left|a_{2q+2}f^{(2q+2)}(n)\right|$
Si $q = 2p-1$ alors :
$\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2q}(\alpha)\right| \leqslant \left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha)\right| \leqslant \left|\widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p}(\alpha)\right| = \left|a_{4p}f^{(4p)}(n)\right| = \left|a_{2q+2}f^{(2q+2)}(n)\right|$
Ainsi dans tous les cas on a bien $\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2q}(\alpha)\right| \leqslant \left|a_{2q+2}f^{(2q+2)}(n)\right| \quad \forall q \geqslant 1 \quad \forall n \geqslant 1$ □

IV.A.3) En particulier $\left|S(3) - S_{100,4}(3)\right| \leqslant \left|a_6 f^{(6)}(100)\right|$. Or $f^{(6)}(x) = (-1)^5 \dfrac{3\times4\times5\times6\times7}{x^8} = -\dfrac{7!}{2x^8}$

Comme $a_6 = \dfrac{1}{42\times 6!}$ on a $\left|S(3) - S_{100,4}(3)\right| \leqslant \dfrac{7}{84}\ 10^{-16} \leqslant 10^{-17}$ □

IV.B -) *Séries de Fourier.*

IV.B.1) La 2π-périodicité de $\widetilde{A}_p$ est évidente ainsi que sa continuité sur $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$.
En outre $\lim\limits_{x\to 2k\pi^-} \widetilde{A}_p(x) = \lim\limits_{x\to 1} A_p(x) = A_p(1)$ et de même $\lim\limits_{x\to 2k\pi^+} \widetilde{A}_p(x) = \lim\limits_{x\to 0} A_p(x) = A_p(0)$.
Ainsi $\widehat{A}_p$ est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ pour tout $p \geqslant 1$. □

Remarquons que comme $A_p(0) = A_p(1)$ pour $p \geqslant 2$ elle est continue sur $\mathbb{R}$ pour $p \geqslant 2$.
Remarquons aussi que de même que précédemment on prouverait qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ pour $p \geqslant 1$. □

IV.B.2) $\widehat{A}_p(n) = \displaystyle\int_0^1 \widetilde{A}_p(2\pi t)e^{-in2\pi t}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 A_p(t)e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}\,t$

Donc $\widehat{A}_p(0) = 0$ et pour $n \neq 0$: $\widehat{A}_p(n) = \displaystyle\int_0^1 A_p(t)f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t$ avec $f(t) = \dfrac{e^{2i\pi nt}}{(-2i\pi n)^{p+1}}$
La formule III.B.1.a) fournit alors puisque $f^{(k)}(1) = f^{(k)}(0) = 1$ pour $k \geqslant 0$ et $A_k(1) - A_k(0) = 0$ pour $k \neq 1$:
$\widehat{A}_p(n) = (-1)^p \times \dfrac{A_1(0) - A_1(1)}{(-2i\pi n)^p} = \dfrac{-1}{(2i\pi n)^p} \quad \forall n \neq 0$ □

IV.B.3) D'après les remarques de IV.B.1), $\widehat{A}_1$ est continue par morceaux (et continue sur $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$) et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Donc :
La série de Fourier de $\widehat{A}_1$ converge simplement vers $\widehat{A}_1$ sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et vers $\dfrac{1}{2}\big(A_1(0) + A_1(1)\big) = 0$ en $2k\pi$ □

En outre pour $p \geqslant 2$, $\widehat{A}_p$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers $\widehat{A}_p$. □

IV.B.4) En particulier pour $p \geqslant 1$ on a :
$\widetilde{A}_{2p}(0) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \widehat{A}_{2p}(n) = -\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{1}{(2i\pi n)^{2p}} = (-1)^{p+1}\dfrac{2}{(2\pi)^{2p}}\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^{2p}} = (-1)^{p+1}\dfrac{S(2p)}{2^{2p-1}\pi^{2p}}$ □

IV.C - ***Comportement de l'erreur.***

IV.C.1) Du calcul déjà effectué de $f^{(k)}(x)$ on tire immédiatement $\dfrac{f^{(2p+2)}(n)}{f^{(2p)}(n)} = \dfrac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)}{n^2}$.
La question précédente donne alors immédiatement $\left|\dfrac{a_{2p+2}f^{2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = \dfrac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2 S(2p)}$ □

IV.C.2) L'encadrement $1 \leqslant S(\alpha) \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha-1}$ du I.A.3) montre que $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} S(\alpha) = 1$ donc d'après la question ci-dessus on a $\lim\limits_{p\to+\infty}\left|\dfrac{a_{2p+2}f^{2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = +\infty$.
Or $\widetilde{S}_{n,2p} = S_n(\alpha) - f(n) + \dfrac{1}{2}f'(n) - \sum\limits_{j=1}^{p} a_{2j}f^{(2j)}(n)$ et la dernière série (qui est alternée) du membre de droite diverge donc grossièrement.

Ainsi à n fixé, $\widetilde{S}_{n,2p}$ ne converge pas vers $S(\alpha)$ lorsque $p \to +\infty$ □

Il y a donc un compromis à réaliser pour choisir un couple (n,p) tel que, d'après IV.A.2), $\left|a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)\right|$ soit le plus petit possible. □

FIN