# CCP 2011 – filière MP – Maths 1

*(Jean-Pierre Roudneff, Louis-le-Grand)*

## Exercice 1

**1.** Soit $a_n = \dfrac{2}{n^2-1}$. Alors (pour $x \neq 0$), on a $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|$.
D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum a_n x^n$ converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$ : le rayon de convergence est par conséquent $R = 1$.

**2.** En décomposant $a_n$ sous la forme $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$, on peut écrire

$$\forall x \in\, ]-1,\, 1[, \qquad S(x) \;=\; \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} \;-\; \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

étant donné que les deux séries entières du second membre ont également $1$ pour rayon de convergence.
Par réindexation,

$$\forall x \in\, ]-1,\, 1[ \setminus \{0\}, \qquad S(x) \;=\; x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \;-\; \frac{1}{x} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

En reconnaissant le développement en série entière d'un logarithme, on a ainsi

$$\forall x \in\, ]-1,\, 1[ \setminus \{0\}, \qquad S(x) \;=\; -x \ln(1-x) \;+\; \frac{1}{x}\big(\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}\big),$$

soit $S(x) = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1-x^2}{x} \ln(1-x)$.
Un calcul direct montre que $S(0) = 0$ et on peut contrôler que cette valeur est cohérente avec la limite de $S(x)$ lorsque $x$ tend vers $0$.

**3.** Comme $S(1-h) \;=\; 1 + \dfrac{1-h}{2} + \dfrac{2-h}{1-h} \times h \ln h$ et que $\displaystyle\lim_{h \longrightarrow 0} h \ln h = 0$, le second membre tend vers $\dfrac{3}{2}$ lorsque $h$ tend vers $0$ donc $S(x)$ admet la limite finie $\dfrac{3}{2}$ lorsque $x$ tend vers $1$ par valeurs inférieures.

## Exercice 2

**1.** – Sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle $(E)$ se met sous forme "normalisée" $y' - \dfrac{3y}{2x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ : l'ensemble de ses solutions est donc un espace affine de dimension $1$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.
– L'équation homogène se résout en $y_H(x) = \lambda \exp\Big(\displaystyle\int_1^x \frac{3}{2t}\,\mathrm{d}t\Big)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $y_H(x) = \lambda x^{3/2}$.
– On recherche la solution générale par la méthode de variation de la constante : $x \longmapsto \lambda(x).x^{3/2}$ vérifie $(E)$ si et seulement si $\lambda'(x) = \dfrac{1}{2x^2}$ si et seulement si $\lambda(x) = -\dfrac{1}{2x} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

**Conclusion** : les solutions de $(E)$ sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $y(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{2} + C.x^{3/2}$ où $C$ est une constante réelle.

**2.** Toute solution de $(E)$ sur $[0, +\infty[$ doit être continue en $0$, donc vérifier $y(0) = 0$.
La dérivabilité (à droite) de $y$ en $0$ se traduirait par l'existence d'une limite finie pour $\dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + C.\sqrt{x}$, ce qui n'est réalisé pour aucune constante réelle $C$.
L'équation $(E)$ n'admet donc aucune solution sur $[0, +\infty[$.

# Problème

**1.** On rappelle que, pour une fonction continue par morceaux,

**(a)** si $f$ est positive sur $[a, +\infty[$, alors (i) $\Longleftrightarrow$ (ii);

**(b)** si $f$ est de signe quelconque, on a seulement (i) $\Longrightarrow$ (ii).

**Partie I : Exemples et propriétés**

**2. (a)** – $E$ contient la fonction nulle, donc n'est pas vide.

– Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu$ des réels donnés. Alors, pour tout $x > 0$, les fonctions $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ et $t \longmapsto g(t)e^{-xt}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$, donc $t \longmapsto \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big).e^{-xt}$ également, et par conséquent $\lambda f + \mu g$ appartient à $E$.

**Conclusion** : $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

**(b)** – Déjà, toute fonction $f$ continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$ appartient à $E$ : en effet, pour tout $x > 0$, on a $f(t)e^{-xt} = O(e^{-xt})$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$, donc $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

– Comme $F$ est clairement stable par combinaison linéaire, $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**(c)** Soit à nouveau $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{L}\big(\lambda f + \mu g\big)(x) = \int_0^{+\infty} \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \lambda\mathcal{L}(f)(x) + \mu\mathcal{L}(g)(x)$$

par linéarité de l'intégrale, d'où $\mathcal{L}\big(\lambda f + \mu g\big) = \lambda\mathcal{L}(f) + \mu\mathcal{L}(g)$.

L'application $\mathcal{L}$ est donc une forme linéaire sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$.

**3. (a)** La fonction $\mathcal{U}$ est continue et bornée donc appartient à $E$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = = \lim_{A \longrightarrow +\infty} \Big[-\frac{e^{-xt}}{x}\Big]_0^A = \frac{1}{x}.$$

**(b)** De même, l'application $h_\lambda$ est continue et bornée donc appartient à $E$ et pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+\lambda)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+\lambda}$$

d'après le calcul du **(a)**.

**4.** – Comme $x > 0$, on a, par croissances comparées, $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} t^n e^{-xt/2} = 0$. En particulier, il existe $A > 0$ tel que $\forall t \geqslant A,\ t^n e^{-xt/2} \leqslant 1$, ce qui conduit à l'inégalité demandée.

– On a donc $|g_n(t)e^{-xt}| \leqslant |f(t)|e^{-xt/2}$ pour tout $t \geqslant A$ et comme l'application $t \longmapsto |f(t)|e^{-xt/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque $f \in E$ et $\dfrac{x}{2} > 0$, il en résulte que $t \longmapsto g_n(t)e^{-xt}$ l'est également, si bien que $g_n$ appartient à $E$.

**5.** Par une intégration par parties,

$$\int_0^A f'(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)e^{-xt}\Big]_0^A + x\int_0^A f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $f$ appartient à $E$, on a $\lim\limits_{A \longrightarrow +\infty} \displaystyle\int_0^A f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(f)(x)$ et par ailleurs $\lim\limits_{A \longrightarrow +\infty} f(A)e^{-xA} = 0$ vu que $f$ est bornée.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^A f'(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ possède donc une limite finie lorsque $A \longrightarrow +\infty$, ce qui équivaut à l'intégrabilité de $t \longmapsto f'(t)e^{-xt}$ étant donné que cette fonction est continue et positive (cf l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) dans la question préliminaire **1.(a)**).

Il en résulte que $f' \in E$ et, par passage à la limite dans le calcul précédent, on aboutit à $\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

**6.** **(a)** Soit $h$ l'application définie par $h(x,\,t) = f(t)e^{-xt}$ sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+$ et soit $a$ un réel strictement positif donné. Vérifions les hypothèses du théorème de Leibniz sur $[a,\,+\infty[$.

Pour tout $x > 0$, l'application $t \longmapsto h(x,\,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

L'application $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ : $(x,\,t) \longmapsto -tf(t)e^{-xt}$ vérifie ensuite les propriétés suivantes :

– pour tout $x \geqslant a$, l'application partielle $t \longmapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,\,t)$, alias $-g_1$, est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$;

– pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, l'application partielle $x \longmapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,\,t)$ est continue;

– (hypothèse de domination) $\forall x \geqslant a$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,\,t)| \leqslant t|f(t)|e^{-at}$ avec $t \longmapsto t|f(t)|e^{-at}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\,+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_*^+$ vu le rôle arbitraire de $a$, et que de plus, $\big(\mathcal{L}(f)\big)' = -\mathcal{L}(g_1)$.

**(b)** D'après le **(a)**, $\big(\mathcal{L}(f)\big)'$ est la transformée de Laplace de la fonction $t \longmapsto -tf(t)$. Ainsi, pour dériver $\mathcal{L}(f)$, il suffit finalement de remplacer $f(t)$ par $-tf(t)$ dans les calculs.

Par une récurrence immédiate, il en ressort que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\,+\infty[$ et que, pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}(f)^{(n)}(x) \;=\; (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t \;=\; (-1)^n\mathcal{L}(g_n)(x).$$

**Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace**

**7.** **(a)** Si $f$ est dans $F$, il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|f(t)| \leqslant M$.

Alors $\forall x > 0$, $|\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} Me^{-xt}\,\mathrm{d}t$, soit $|\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant \dfrac{M}{x}$, d'où $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.

**(b)** D'après la question **5.**, on a, pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{L}(f')(x) \;=\; x\mathcal{L}(f)(x) \;-\; f(0).$$

Comme $f'$ appartient à $F$, le **7.(a)** donne $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \mathcal{L}(f')(x) = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

**8.** **(a)** Par définition de la limite, il existe $A \geqslant 0$ tel que $\forall t \geqslant A$, $|f(t)| \leqslant |\ell| + 1$.

Par ailleurs, $f$ est continue sur $[0,\,A]$, donc bornée par un certain réel $M$ sur ce segment d'après le théorème des bornes.

Au final, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|f(t)| \leqslant \max\big(|\ell| + 1,\, M\big)$ donc $f$ appartient à $F$.

**(b)** À l'aide du changement de variable affine défini par $x = a_n t$,

$$a_n\mathcal{L}(f)(a_n) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-a_n t} f(t) a_n\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-x} f\big(\frac{x}{a_n}\big)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{+\infty} h_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

**(c)** Comme $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = 0$, la suite de fonctions (continues par morceaux) $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction continue par morceaux et intégrable $h :\ x \longmapsto \ell e^{-x}$.

De plus, comme $f$ est bornée, on a $\forall x > 0$, $|h_n(x)| \leqslant \|\,f\,\|_\infty\, e^{-x}$. L'application $x \longmapsto \|\,f\,\|_\infty\, e^{-x}$ étant intégrable, le théorème de convergence dominée s'applique, d'où $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

**(d)** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite arbitraire de réels strictement positifs tendant vers $0$, la caractérisation séquentielle de la limite permet d'écrire que $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

Si on suppose de plus $\ell \neq 0$, la limite précédente montre que $\mathcal{L}(f)(x) \sim \dfrac{\ell}{x}$ au $\mathcal{V}(0)$.

**9.** **(a)** $R$ se présente comme l'intégrale fonction de la borne inférieure d'une application continue : elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x > 0, \qquad R'(x) \;=\; -f(x).$$

$R'$ appartient donc à $E$, d'où

$$\forall x > 0, \qquad \mathcal{L}(f)(x) \;=\; -\mathcal{L}(R')(x) \;=\; R(0) \;-\; x\mathcal{L}(R)(x).$$

**(b)** – L'intégrabilité de $f$ sur $\mathbb{R}^+$ implique que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} R(x) = 0$ donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \geqslant 0$ tel que $\forall t \geqslant A,\ |R(t)| \leqslant \varepsilon$.

– En utilisant la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale,

$$|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \;=\; |x\mathcal{L}(R)(x)| \;\leqslant\; x\Big(\int_0^A |R(t)|e^{-xt}\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} |R(t)|e^{-xt}\,\mathrm{d}t\Big)$$

$$\leqslant\; x\int_0^A |R(t)|\,\mathrm{d}t \;+\; x\int_0^{+\infty} \varepsilon e^{-xt}\,\mathrm{d}t \;\leqslant\; x\int_0^A |R(t)|\,\mathrm{d}t \;+\; \varepsilon.$$

**(c)** $\varepsilon$ étant fixé, $A$ l'est aussi donc $\displaystyle\int_0^A |R(t)|\,\mathrm{d}t$ représente une constante.

Par conséquent, $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} x\int_0^A |R(t)|\,\mathrm{d}t = 0$, si bien qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in\, ]0,\, \alpha[, \qquad x\int_0^A |R(t)|\,\mathrm{d}t \;\leqslant\; \varepsilon.$$

Récapitulons : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in\, ]0,\, \alpha[,\ |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui montre que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x) = R(0)$, c'est-à-dire que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en $0$ par $R(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

*Remarque : l'intégrabilité de $f$ n'a été utilisée que pour prouver que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} R(x) = 0$. La propriété $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ reste donc valable lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est seulement improprement convergente (cette observation sera utilisée à la fin du problème).*

## Partie III : Application

**10.** **(a)** Procédons par intégration par parties en nous plaçant sur l'intervalle $[1,\, x]$ afin d'éviter tout problème artificiel en $0$.

$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \Big[-\frac{\cos t}{t}\Big]_1^x \;-\; \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

L'application $t \longmapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$ étant intégrable sur $[1,\, +\infty[$ (car dominée par $\dfrac{1}{t^2}$), l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} -\dfrac{\cos x}{x} = 0$, si bien que $F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite réelle $\ell$ en $+\infty$.

**(b)** Par une minoration évidente,

$$u_n \;=\; \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \Big|\frac{\sin t}{t}\Big|\,\mathrm{d}t \;\geqslant\; \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(n+1)\pi}\,\mathrm{d}t,$$

soit $u_n \geqslant \dfrac{2}{(n+1)\pi}$.

La série harmonique étant divergente, cette minoration montre que $\sum u_n$ diverge. L'application $f$ n'est pas intégrable car sinon $\displaystyle\int_0^{(n+1)\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} u_k$ possèderait une limite finie lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**(c)** – La méthode la plus naturelle pour calculer $\displaystyle\int_0^X (\sin t)e^{-xt}\,dt$ consiste à observer que cette intégrale est la partie imaginaire de $\displaystyle\int_0^X e^{(i-x)t}\,\mathrm{d}t$, soit $\displaystyle\int_0^X (\sin t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\Big(\Big[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\Big]_0^X\Big)$, ce qui donne $\displaystyle\int_0^X (\sin t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+x^2}\Big(e^{-xX}(x\sin X+\cos X)-1\Big)$ en multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur.

*Remarque : une autre méthode consiste à fixer $x$ et à considérer les deux membres de l'égalité à établir comme des fonctions de $X$. On vérifie par un calcul simple que leurs dérivées par rapport à $X$ sont égales, donc ils diffèrent d'une constante. Enfin, leurs valeurs en $X = 0$ sont les mêmes, ce qui prouve l'égalité pour tout $X \geqslant 0$.*

– La fonction $t \longmapsto (\sin t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car dominée par la fonction intégrable $t \longmapsto e^{-xt}$.

– La quantité $\displaystyle\int_0^X (\sin t)e^{-xt}\,dt$ possède donc une limite finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$ et, en employant l'égalité qui vient d'être établie, on trouve immédiatement

$$\int_0^{+\infty} (\sin t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}.$$

**(d)** En prenant pour $f$ l'application définie par $f(0) = 1$ et $\forall t > 0,\ \ f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$, l'intégrale $\mathcal{L}(f)(x)$ s'écrit $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,\,t)\,\mathrm{d}t$ avec $g(x,\,0) = 1$ et $g(x,\,t) = \dfrac{\sin t}{t}e^{-xt}$ pour $t > 0$.

Vérifions les hypothèses du théorème de Leibniz pour cette intégrale à paramètre sur $[a,\,+\infty[$, où $a$ est un réel strictement positif donné.

– Pour tout $x \geqslant a$, l'application $t \longmapsto g(x,\,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

– Pour tout $x \geqslant a$, l'application $t \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

– Pour tout $t \geqslant 0$, l'application $x \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\,t)$ est continue.

– (hypothèse de domination) $\forall x \geqslant a,\ \ \forall t > 0,\ \ \Big|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\,t)\Big| \leqslant e^{-at}$ avec $t \longmapsto e^{-at}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Il résulte du théorème de Leibniz que $\mathcal{L}(f)$ est dérivable sur $[a,\,+\infty[$, donc sur $]0,\,+\infty[$ (vu le choix arbitraire de $a$) et que

$$\forall x > 0, \qquad \mathcal{L}(f)'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,\,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} (\sin t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Par primitivation, il existe donc une constante $C$ telle que $\forall x > 0,\ \ \mathcal{L}(f)(x) = C - \arctan x$.

Comme $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$ d'après la question **7.**, il vient $C = \dfrac{\pi}{2}$.

D'après le **10.(a)**, l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie $\ell$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$. En appliquant la généralisation de la question **9.**, on a donc $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$, d'où $\ell = \dfrac{\pi}{2}$.

**Conclusion** : $\forall x > 0,\ \ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ et, en tant qu'intégrale improprement convergente, $\ell = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.