Concours communs polytechniques 2011-Filière MP- mathématiques 2

EXERCICE

Commutant d'une matrice

Q1. • La matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un élément de $C(A)$, donc $C(A) \neq \emptyset$.

• Soit $(M, N, \lambda) \in C(A)^2 \times \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} A(M+\lambda N) &= AM + \lambda AN \\ &= MA + \lambda NA \\ &= (M+\lambda N)A \end{aligned}$$

Donc $C(A)$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q2. $Sp(A) = \{2, 3\}$, 2 est double et 3 est simple. L'espace propre associé à la valeur propre 3 est $E_3(A) = \textbf{vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et celui associé à la valeur propre 2 est $E_2(A) = \textbf{vect}\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$. Posons $u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$, cherchons un vecteur $w = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tel que $Aw = v + 2w$ ce système est équivalent à $\left\{\begin{aligned} -x+4y-2z &= 4 \\ 4y-3z &= 3 \end{aligned}\right.$ on prend $w = \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$, alors A et T sont semblable car elles représentent le même endomorphisme dans deux bases et $A = PTP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\1 & 3 & 0\\1 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

Q3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$.
$M \in C(T) \iff MT = TM$, ce système donne $m_{12} = m_{21} = m_{13} = m_{31} = m_{32} = 0$ et $m_{22} = m_{33}$, donc $C(T) = \left\{\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & c & b\\0 & 0 & c\end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R}\right\} = \textbf{vect}(E_{11}, E_{22}+E_{33}, E_{23})$, la famille $(E_{11}, E_{22}+E_{33}, E_{23})$ est libre donc $C(T)$ est de dimension 3.

Q4. • L'application $\varphi : P \longmapsto P^{-1}MP$ est évidement linéaire.

• Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$;

$$\begin{aligned} M \in \ker\varphi &\iff P^{-1}MP = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \\ &\iff M = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Ainsi φ est un automorphisme.
Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} M \in C(A) &\iff AM = MA \\ &\iff PTP^{-1}M = MPTP^{-1} \\ &\iff TP^{-1}MP = P^{-1}MPT \\ &\iff T\varphi(M) = \varphi(M)T \\ &\iff \varphi(M) \in C(T) \\ &\iff M \in \varphi^{-1}(C(T)) \end{aligned}$$

Donc $C(A) = \varphi^{-1}(C(T))$, φ est un automorphisme, par suite $\dim(C(A)) = 3$.

Q5. a/ • De la question **2)** la matrice A n'est pas diagonalisable, car $\dim E_2 = 1 \neq 2$.

• Alors si Π_A désigne le polynôme minimal de A, alors $\Pi_A = (X-2)^2(X-3)$.

• Soit P un polynôme non nul et annulateur de A, alors Π_A divise P, par suite $\deg P \geqslant 3$. Donc il n'existe pas de polynôme non nul annulateur de A de degré inférieur ou égal à 2.

• Le polynôme nul est évidement un polynôme annulateur de A.

b/ • $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $cI_3 + bA + aA^2$ commute avec A, donc $\mathbf{vect}(I_3, A, A^2) \subset C(A)$.

• la famille (I_3, A, A^2) est libre, en effet s'ils existent $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $cI_3 + bA + aA^2 = 0$ alors le polynôme $P = aX^2 + bX + c$ est de degré 2 et annulateur de A, absurde avec $5a$). Donc les deux sev $C(A)$ et $\mathbf{vect}(I_3, A, A^2)$ ont même dimension, par conséquent $\mathbf{vect}(I_3, A, A^2) = C(A)$.

c/ Soit $\mathcal{P}_A = \{Q(A) \,/\, Q \in \mathbb{R}[X]\}$, il est évident que $\mathcal{P}_A \subset C(A)$, car si $Q \in \mathbb{R}[X]$ $AQ(A) = Q(A)A$ (A commute avec ses puissances), et que les éléments de $\mathbf{vect}(I_3, A, A^2)$ sont des polynômes en A l'égalité en découle.

Si $A = I_3$ alors $C(A) = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{P}_{I_3} = \mathbb{R}I_3$ de dimension 1, donc $C(I_3) \neq \mathcal{P}_{I_3}$.

PROBLÈME

Q1. $S \in S_n$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres, il existe $\mathcal{B}(V_1, ..., V_n)$ une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^n$ qui diagonalise S, soit $X = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i V_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; ${}^tXSX = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \lambda_i$.

$\Longrightarrow$ Si $S \in S_n^+$, alors ${}^tV_iSV_i = \lambda_i \geqslant 0$.

$\Longleftarrow$ Si $Sp \subset \mathbb{R}^+$, alors ${}^tXSX = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \lambda_i \geqslant 0$.

Partie I

Q2. Soit $S \in S_n^+$, alors ses valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont positifs ou nulle.

On a $\det S = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$ et tr$S = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$, l'inégalité $\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$ s'écrit $\sqrt[n]{\det S} \leqslant \frac{1}{n}\mathrm{tr}S$.

Q3. **Application** :

a/ ${}^tMM \in S_n^+$. En effet ${}^t({}^tMM) = {}^tMM$, et si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ${}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)MX = ||MX||_2^2 \geqslant 0$.

b/ On utilise la question précédente avec $S = {}^tMM$ on a : $\det S = (\det M)^2$, et tr$S = \sum\limits_{i=}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} m_{ij}^2$ l'inégalité précédente s'écrit : $(\det M)^2 \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\sum\limits_{i=}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} m_{ij}^2\right)^n$.

Partie II

Q4. a/ $A \in S_n^{++}$, $B \in S_n$. Posons $\mathcal{B}(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $A = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $\mathcal{B}'(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une base orthonormale de (E, φ) donc $\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$.

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$, posons $U = mat_{\mathcal{B}}(u)$, $V = mat_{\mathcal{B}}(v)$, $U' = mat_{\mathcal{B}'}(u)$, $V' = mat_{\mathcal{B}'}(v)$. On a alors $RU' = U$ et $RV' = V$ donc :

$\varphi(u,v) = {}^tUAV = {}^tU' \underbrace{{}^tRAR} V'$, d'autre part $\varphi(u,v) = {}^tU'I_nV'$ car $I_n = (\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$; donc ${}^tU'I_nV' = {}^tU' \underbrace{{}^tRAR} V'$ et ceci pour tout $U', V' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par suite $I_n = {}^tRAR$.

b/ On a $C = {}^tRBR$, donc C est symétrique car B l'est aussi et C est à cœfficients réels, donc orthogonalement diagonalisable càd $\exists Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que ${}^tQCQ = D$.

c/ On a

$$\begin{array}{rcl} B & = & {}^tR^{-1}CR^{-1} \\ & = & {}^tR^{-1}QD{}^tQR^{-1} \\ & = & {}^tPQP \quad \text{où} \quad P = {}^tQR^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \end{array}$$

Alors ${}^tPP = {}^tR^{-1}Q{}^tQR^{-1} = {}^tR^{-1}R^{-1} = A$ d'après la question $\mathbf{4.}a)$

d/ Soit q la forme quadratique dont B est sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors $q((x,y)) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$, la signature de q est donc $(1,0)$

Posons $u = xe_1 + ye_2 = X\varepsilon_1 + Y\varepsilon_2$ où $\mathcal{B}(e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}'(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle $q(u = X\varepsilon_1 + Y\varepsilon_2) = X^2$. On pose :

$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & X \\ y & = & Y \end{array}\right.$ alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ alors $R = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On prend $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas orthogonale.

Remarque : La matrice B est de rang 1 donc 0 est l'une de ses valeurs propres , sa trace est 2 donc l'autre valeur propre est 2, il apparaît donc que la signature de q est $(1,0)$.

Q5. **a/** On peut appliquer le résultat de $\mathbf{4.}c)$ ainsi

$\det(A+B) = \det({}^tPP + {}^tPDP) = \det(P)^2\det(I_n + D)$ et $\det A + \det B = \det({}^tPP) + \det({}^tPDP) = \det(P)^2\left[\det(I_n) + \det(D)\right]$

Tout revient à montrer que $\det(I_n + D) \geqslant \det(I_n) + \det(D)$ car $\det P \neq 0$.

Les matrices D et B représentent les matrices de <u>la même</u> forme quadratique dans deux bases, le théorème d'inertie de Sylvester assure que les éléments diagonaux de D sont tous positifs ou nuls.

Soit $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, reste à montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) \geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$, inégalité déjà donnée par l'énoncé.

b/ Supposons que $A, B \in S_n^{++}\backslash S_n^{+}$, alors $\det A = \det B = 0$, et si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^tX(A+B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geqslant 0$ car $A, B \in S_n^{+}$. Donc $\det(A+B) \geqslant 0 = \det A + \det B$.

Q6. **a/** On applique encore $\mathbf{4.}c)$ et $A = {}^tPP$, $B = {}^tPDP$, donc

$$\det(tA + (1-t)B) = (\det P)^2\det(tI_n + (1-t)D) = (\det P)^2\prod_{i=1}^{n}(t + (1-t)\lambda_i).$$

b/ Même raisonnement que celui fait en $\mathbf{5.}a)$ les éléments diagonaux de D sont tous strictement positifs, donc $\forall t \in [0,1],\ t + (1-t)\lambda_i > 0$, la concavité de la fonction $\ln$ donne $\ln(t + (1-t)\lambda_i) \geqslant t\ln 1 + (1-t)\ln\lambda_i$, l'inégalité demandé en découle.

c/ On $(\det A)^t(\det B)^{1-t} = (\det P)^2\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{1-t}$, en combinant les questions $\mathbf{6.}a)$ et $\mathbf{6.}b)$, on obtient $\det(tA + (1-t)B) \geqslant (\det A)^t(\det B)^{1-t}$.

Q7. **a/** Soit $A \in S_n^{+}$, il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ tels que $A = QD{}^tQ$, la matrice $A_k = Q\,\mathrm{diag}\left(\lambda_1 + \dfrac{1}{k}, ..., \lambda_n + \dfrac{1}{k}\right){}^tQ = A + \dfrac{1}{k}I_n$ est un élément de S_n^{++} de plus $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$, càd $\overline{S_n^{++}} = S_n^{+}$.

b/ Soit $(A,B) \in S_n^{+2}$, ils existent des suites $(A_k)_k$ et $(B_k)_k$ d'éléments de S_n^{++} tels que $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$ et $B_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} B$.

L'application $\det : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et $(\det(A_k + B_k))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det A_k)^{\frac{1}{n}} + (\det B_k)^{\frac{1}{n}}$, en passant à la limite, on obtient $(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}$.

Q8. a/ Supposons que $A = {}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2$, alors ${}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2$ donc ${}^t(T_1T_2^{-1})T_1T_2^{-1} = I_n$ $(*)$, ainsi la matrice $T_1T_2^{-1}$ est orthogonale
D'autre part $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ et $(\mathcal{T};.)$ est un groupe donc $T_1T_2^{-1} \in \mathcal{T}$, or ${}^t(T_1T_2^{-1})$ est une matrice triangulaire inférieure inversible à cœfficients diagonaux positifs
Posons $T = T_1T_2^{-1}$, la relation $(*)$ entraîne que ${}^tT = T^{-1}$ et $T^{-1} \in \mathcal{T}$, donc T est à la fois une matrice triangulaire supérieure et inférieure, donc T est une matrice diagonale, $(*)$ donne $T^2 = I_n$ ainsi $T = I_n$ car ses termes diagonaux sont positifs : Par conséquent $T_1 = T_2$.

b/ Ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 2 & 2 & . & . & 2 \\ . & 2 & . & . & . & . \\ . & . & . & p & p & p \\ . & . & . & p & . & . \\ 1 & 2 & . & p & . & n \end{pmatrix} = {}^tTT$ où $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $t_{i,j} = 1$ si $i \leqslant j$ et $t_{i,j} = 0$ sinon, pour cela posons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ alors $a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}t_{kj} = \sum_{1\leqslant k\leqslant \min(i,j)} t_{ki}t_{kj}$ car $t_{p,q} = 0$ si $p > q$.

- $t_{11}t_{1j} = a_{1j} = 1$ donc $t_{11} = 1$ il suffit de prendre $j = 1$ et $\boxed{t_{1j} = 1}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.
- $t_{12}t_{1j} + t_{22}t_{2j} = a_{2j} = 2$ donc $t_{22} = 1$ il suffit de prendre $j = 2$ et $\boxed{t_{2j} = 1}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et ainsi de suite.

Q9. *Un peu d'informatique* : On procède de la même façon que précédemment pour obtenir la décomposition.

Q10. a/ $S \in S_n^{++}$, donc de la question **8.** il existe une matrice triangulaire supérieure inversible à cœfficients diagonaux positifs T vérifiant ${}^tTT = S$, posons $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Soit $\forall i \in [\![1, n]\!]$, alors

$$\begin{aligned} s_{ii} &= \sum_{k=1}^{n} t_{ki}^2 \\ &\geqslant t_{ii}^2 \end{aligned}$$

Si ${}^tE_i = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}}\text{ place}}, 0, ..., 0)$ alors ${}^tE_iSE_i = s_{ii} > 0$ car S est dans S_n^{++}.

Par conséquent $|t_{ii}| \leqslant \sqrt{s_{ii}}$, et $\sqrt{\det S} = |\det T| \underbrace{=}_{\text{car } T \text{est triangulaire}} \prod_{i=1}^{n} |t_{ii}| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sqrt{s_{ii}} = \sqrt{\prod_{i=1}^{n} s_{ii}}$, ce qui donne $\det S \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{ii}$.

b/ Posons $S = {}^tMM$, alors S est symétrique et de plus inversible car M l'est aussi. En appliquant la question $10.a)$ on obtient $(\det M)^2 \leqslant \prod_{i=}^{n} s_{ii}$ et $s_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$, d'où l'inégalité voulu.

Je tiens à remercier les élèves du lycée Thechnique de TAZA qui ont contribué à la réalisation de ce document notamment :
Samiha JLILAB ; Noura BOULAHIYA ; Kaoutar L'MAABOUD ; Saâd CHABACH THAMI ; Hind EL YAAGOUBI ; Sanae EL FID ; Ghizlane ASSIOUI et Salima ABAYDI.

Fin du corrigé

sadikoulmeki@yahoo.fr