Dans tout ce corrigé, on note $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales d'ordre n, $S_n(\mathbb{R})$ l'espaces des matrices symétriques réelles d'ordre n, $\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ une matrice diagonale, et $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

I Généralités

I.A- Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ et $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $AX = \lambda X$. Quitte à changer X en $\dfrac{1}{||X||}X$, on suppose $||X|| = 1$.
Alors ${}^tXAX = \lambda {}^tXX = \lambda$ donc $\lambda \in R(A)$.

I.B-

I.B.1) Notons $e_i = {}^t(0, 0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ le i-ème vecteur de la base canonique. $||e_i|| = 1$ donc $a_{ii} = {}^te_iAe_i \in R(A)$.

I.B.2) Pour tout $X = {}^t(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ${}^tXAX = 0$ donc $R(A) \subset \{0\}$ (en fait, égalité d'après I.B.1). Donc $a_{12} = 1 \notin R(A)$. On généralise sans peine au cas $n \geq 2$ avec la matrice $A = \left(\begin{array}{c|c} A_2 & O_{2,n-2} \\ \hline O_{n-2,2} & O_{n-2} \end{array}\right)$ où $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

I.C-

I.C.1) $||X_1|| = ||X_2|| = 1$ donc si X_1 et X_2 sont liés, alors $X_1 = X_2$ ou $X_1 = -X_2$. Dans les deux cas, $a = {}^tX_1AX_1 = {}^tX_2AX_2 = b$, contradiction. Donc X_1 et X_2 sont indépendants.

I.C.2) $\lambda \mapsto X_\lambda = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$ est continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^n$ (ses coordonnées sont des fonctions affines, donc continues).
$(X, Y) \mapsto {}^tXAY$ est continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ car bilinéaire en dimension finie, donc $\lambda \mapsto {}^tX_\lambda AX_\lambda$ et $\lambda \mapsto {}^tX_\lambda X_\lambda = ||X_\lambda||^2$ sont continues sur $[0, 1]$.
Comme X_1 et X_2 sont indépendants, $\lambda \mapsto ||X_\lambda||$ ne s'annule pas, donc le quotient : $\lambda \mapsto \dfrac{{}^tX_\lambda AX_\lambda}{||X_\lambda||^2}$ est bien défini et continu sur $[0, 1]$, cqfd.

I.C.3) Comme ϕ est continue et $a, b \in \phi([0, 1])$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $[a, b] \subset \phi([0, 1])$.
Or pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\phi(\lambda) = {}^t\left(\frac{X_\lambda}{||X_\lambda||}\right).A.\left(\frac{X_\lambda}{||X_\lambda||}\right) \in R(A)$. On en déduit $\phi([0, 1]) \subset R(A)$, donc $[a, b] \subset R(A)$.
Remarque : on vient d'établir que $R(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

I.D- Supposons $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$.
Si pour tout i, $a_{ii} = 0$, alors $0 \in R(A)$ d'après I.B1).
Sinon, il existe i tel que $a_{ii} > 0$ et j tel que $a_{jj} < 0$. D'après I.C, $[a_{jj}, a_{ii}] \subset R(A)$, donc $0 \in R(A)$, cqfd.

I.E- Comme Q est orthogonale, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, si $||X|| = 1$, alors $||QX|| = 1$. En particulier, ${}^tX{}^tQAQX = {}^t(QX)A(QX) \in R(A)$, donc $R({}^tQAQ) \subset R(A)$.
On remarque que ${}^tQ \in O_n(\mathbb{R})$ et $A = {}^t({}^tQ)({}^tQAQ){}^tQ$, donc le résultat précédent donne $R(A) \subset R({}^tQAQ)$, d'où l'égalité par double inclusion.

I.F-

I.F.1) Soit Q orthogonale telle que ${}^tQAQ$ ait pour diagonale $(\operatorname{Tr}(A), 0, \cdots, 0)$. D'après I.B.1) et I.E., $\operatorname{Tr}(A) \in R({}^tQAQ) = R(A)$.

I.F.2) Soit $X_1 \in \mathbb{R}^n$, unitaire, tel que ${}^tX_1AX_1 = x$. Avec le théorème de la base orthonormale incomplète, on choisit les vecteurs X_2, ..., X_n tels que $(X_1, \cdots, X_n)$ soit une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Notons Q_1 la matrice de passage de la base canonique à $(X_1, \cdots, X_n)$. Elle est orthogonale comme matrice de passage entre deux bases orthonormales, et ${}^te_1{}^tQ_1AQ_1e_1 = {}^tX_1AX_1 = x$, donc Q répond à la question posée.
NB : X_1 est également la matrice des coordonnées de X_1 dans la base canonique ; e_1 est la matrice des coordonnées de X_1 dans la nouvelle base. La formule de changement de base donne donc : $X_1 = Q_1e_1$.

I.F.3) Si A est symétrique, alors ${}^t({}^tQ_1AQ_1) = {}^tQ_1{}^tAQ_1 = {}^tQ_1AQ_1$, donc ${}^tQ_1AQ_1$ est symétrique, et en particulier ${}^tC = L$ et ${}^tB = B$, c'est-à-dire que B est symétrique.

I.F.4) ${}^tQ_1 = Q_1{}^{-1}$ donc ${}^tQ_1AQ_1$ et A sont semblables et ont même trace.
(Également : $\operatorname{Tr}({}^tQ_1(AQ_1)) = \operatorname{Tr}((AQ_1){}^tQ_1) = \operatorname{Tr}(A)$.)

I.F.5) On veut démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété P_n : « Pour toute matrice A symétrique réelle d'ordre n, (C1) implique (C2). »
Pour $n = 1$, le cas est clair. Soit n entier ≥ 2. On suppose P_{n-1}. Soit A symétrique réelle d'ordre n telle que $\operatorname{Tr}(A) \in R(A)$.
D'après I.F.2), il existe $Q_1 \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tQ_1AQ_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{Tr}(A) & L \\ C & B \end{pmatrix}$ avec B symétrique réelle d'ordre $n - 1$ d'après I.F.3).

Avec I.F4), $\mathrm{Tr}\,A = \mathrm{Tr}\,{}^tQ_1AQ_1 = \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,B$ donc $\mathrm{Tr}\,B = 0$.
D'après I.D, $0 \in R(B)$ c'est-à-dire $\mathrm{Tr}\,(B) \in R(B)$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à B : il existe $Q_2 \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tQ_2BQ_2$ soit de diagonale nulle.
On pose alors $Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$ (par blocs). Alors $Q_3 \in O_n(\mathbb{R})$ et on calcule :

$${}^tQ_3{}^tQ_1AQ_1Q_3 = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Tr}\,(A) & LQ_2 \\ \hline {}^tQ_2C & {}^tQ_2BQ_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathrm{Tr}\,(A) & & LQ_2 & \\ \hline & 0 & & \star \\ {}^tQ_2C & & \ddots & \\ & \star & & 0 \end{array}\right)$$

$Q = Q_1Q_3 \in O_n(\mathbb{R})$, on a donc établi (C2), et donc le résultat demandé, par récurrence.

II Matrices symétriques de format (2,2)

II.A- A est symétrique réelle. D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormale (Y_1, Y_2) de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A. On fixe une telle base de sorte que $AY_i = \lambda_iY_i$, avec $i = 1, 2$.
On a : ${}^tY_iAY_i = \lambda_i$, donc $\lambda_i \in R(A)$ pour $i = 1, 2$. D'après I.C.3), $[\lambda_1, \lambda_2] \subset R(A)$.
Soit X unitaire de coordonnées (x, y) dans la base (Y_1, Y_2). On a ${}^tXAX = \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 \begin{cases} \leq \lambda_2(x^2+y^2) = \lambda_2 \\ \geq \lambda_1(x^2+y^2) = \lambda_1 \end{cases}$,
donc $R(A) \subset [\lambda_1, \lambda_2]$, d'où l'égalité par double inclusion.

II.B-

II.B.1) Dans la base orthonormale (Y_1, Y_2) l'équation de Γ s'écrit : $\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 = 1$. On en déduit :

a) Si $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_2 \leq 0$, alors $\Gamma = \emptyset$.

b) Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$, Γ est la réunion de deux droites parallèles ($y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$).

c) Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors Γ est une ellipse (sauf cas $\lambda_1 = \lambda_2$, où Γ est un cercle de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$).

d) Enfin, si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors Γ est une hyperbole.

NB : Il n'y a pas d'autre cas car on a imposé $\lambda_2 \geq \lambda_1$.

II.B.2)

$\lambda_1 = -4$: Hyperbole d'équation $-4x^2 + y^2 = 1$, asymptotes $y = \pm 2x$
$\lambda_1 = -1$: Hyperbole équilatère $-x^2 + y^2 = 1$, asymptotes $y = \pm - x$.
$\lambda_1 = 0$: Droites $y = 1$ et $y = -1$.
$\lambda_1 = 1/4$: Ellipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
$\lambda_1 = 1$: Cercle trigonométrique.

NB : Si on choisit $A = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, on obtient les symétriques de ces courbes par rapport à la première bissectrice.

II.C- Le théorème spectral fournit une matrice orthogonale P telle que ${}^tPBP = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2)$. On note $A' = {}^tPAP = (a'_{ij})$. Alors $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(A'B') = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \mu_1a'_{11} & \mu_1a'_{12} \\ \mu_2a'_{21} & \mu_2a'_{22} \end{pmatrix} = \mu_1a'_{11} + \mu_2a'_{22}$.
Posons $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \mu_1(\mathrm{Tr}\,(A) - t) + \mu_2t$. Comme $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(A') = a'_{11} + a'_{22}$, on constate : $\mathrm{Tr}\,(AB) = \varphi(a'_{22})$.
φ est une fonction affine croissante ($\varphi'(t) = \mu_2 - \mu_1 \geq 0$).
Or $a'_{22} \in R(A')$ (d'après I.B.1) et $R(A') = R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$ donc $\mathrm{Tr}\,(AB) \leq \varphi(\lambda_2) = \mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2$, cqfd.

II.D-

II.D.1) λ_1, $\lambda_2 \geq 0$ donc $\det(A) = \lambda_1.\lambda_2 \geq 0$.

II.D.2) On reprend la base orthonormale (Y_1, Y_2) du II.A. Pour tout $X = xY_1 + yY_2$, ${}^tXAX = \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 \geq 0$, et en particulier $R(A) \subset \mathbb{R}_+$.

II.D.3) a, $d \in R(A)$ d'après I.B.1, et comme $R(A) \subset \mathbb{R}_+$, il vient a, $d \geq 0$.

II.D.4) S est diagonalisable et admet deux valeurs propres réelles $\alpha_1 \leq \alpha_2$ (comptées avec multiplicité) et donc $\mathrm{Tr}\,(S) = \alpha_1 + \alpha_2$ et $\det(S) = \alpha_1\alpha_2$.
Si α_1 et $\alpha_2 \geq 0$, alors trace et déterminant de S sont ≥ 0.
Réciproquement, si $\alpha_1\alpha_2 \geq 0$, alors α_1 et α_2 sont de même signe, et si de plus $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 0$, alors les deux valeurs propres sont ≥ 0, cqfd.

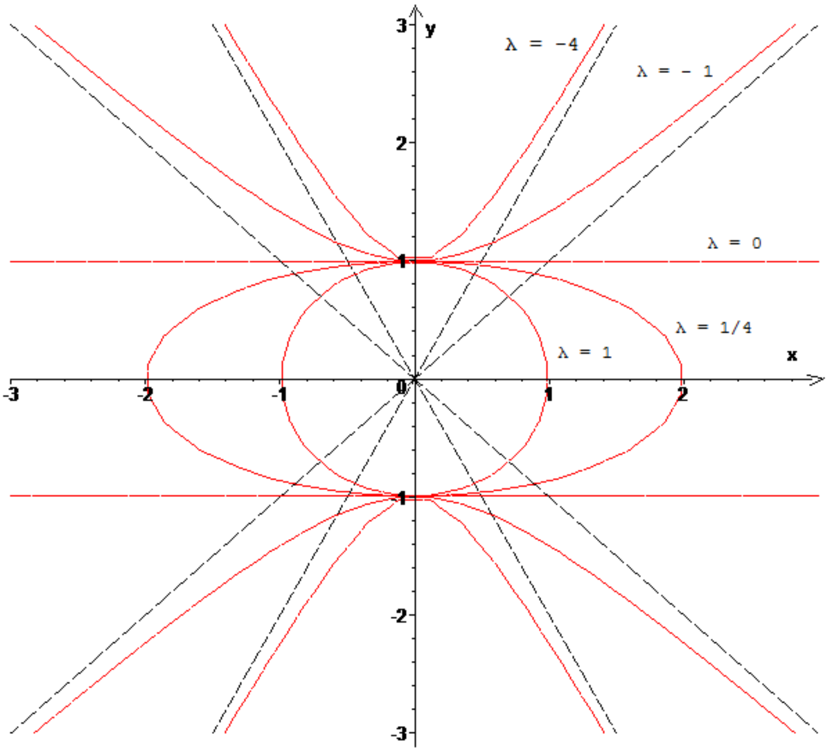

Figure 1 – Γ pour différentes valeurs de λ_1

II.E- On remarque qu'ici, a_1, d_1, a_2, d_2, les traces et les déterminants de A et B sont positifs ou nuls.

II.E.1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$b_1 b_2 + \sqrt{\det(A)}\sqrt{\det(B)} \leq \sqrt{b_1^2 + \det(A)}.\sqrt{b_2^2 + \det(B)}$$

Or $\det(A) = a_1 d_1 - b_1^2$ et $\det(B) = a_2 d_2 - b_2^2$, donc $b_1 b_2 + \sqrt{\det(A)\det(B)} \leq \sqrt{a_1 d_1 a_2 d_2}$, cqfd.

II.E.2) Par un calcul direct :

$$\begin{aligned}\det(A+B) &= (a_1 + a_2)(d_1 + d_2) - (b_1 + b_2)^2 \\ &= \det(A) + \det(B) + a_2 d_1 + a_1 d_2 - 2 b_1 b_2 \text{ et, d'après I.E.1) :} \\ &\geq \det(A) + \det(B) + 2\sqrt{\det(A)\det(B)} + (\sqrt{a_2 d_1} - \sqrt{a_1 d_2})^2 \\ &\geq \det(A) + \det(B) + 2\sqrt{\det(A)\det(B)}\end{aligned}$$

II.F- Remarquons que $a_1, d_1 \in R(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ d'après II.A, donc ici a_1, d_1 et de même, a_2, $d_2 > 0$.

II.F.1) En reprenant les suites d'inégalités ci-dessus, on constate qu'il y a égalité si et seulement si on a les deux propriétés suivantes :

a) $\sqrt{a_2 d_1} = \sqrt{a_1 d_2}$, c'est-à-dire $a_2 d_1 = a_1 d_2$, ou encore $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = 0$, autrement dit (a_1, d_1) et (a_2, d_2) colinéaires.

b) cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire les vecteurs $(b_1, \sqrt{\det(A)})$ et $(b_2, \sqrt{\det(B)})$ sont colinéaires et de même sens.

II.F.2) On traduit les deux conditions ci-dessus. Si (a), alors il existe un réel λ tel que $a_1 = \lambda a_2$ et $d_1 = \lambda d_2$ (nécessairement, $\lambda > 0$). Si (b), comme $\det(A)$, $\det(B) > 0$, il existe $\mu > 0$ tel que tel que $b_1 = \mu b_2$ et $\det(A) = \mu^2 \det(B)$. On en déduit : $a_1 d_2 = b_1^2 + \det(A) = \mu^2 b_2^+ \mu^2 \det(B) = \mu^2 a_2 d_1$.
Il vient alors : $\lambda^2 = \mu^2$, donc $\lambda = \mu$, et finalement $A = \lambda B$.
Réciproquement, si $A = \lambda B$, avec $\lambda > 0$, alors $\det(A+B) = \det((1+\lambda)B) = (1+\lambda)^2 \det(B) = \det(B) + 2\lambda \det(B) + \lambda^2 \det(B) = \det(B) + 2\sqrt{\det(A)\det(B)} + \det(A)$, cqfd.

II.G-

Réflexivité Pour tout $S \in S_2(\mathbb{R})$, $S - S = 0 \geq 0$ (car $\mathrm{Sp}(0) = \{0\} \subset \mathbb{R}_+$!), donc $S \leq S$.

Antisymétrie Soient S et $S' \in S_2(\mathbb{R})$ tels que $S' \leq S$ et $S \leq S'$. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp(S'-S)}$, on a $\lambda \geq 0$ et $-\lambda \in \mathrm{Sp(S-S')}$ donc $-\lambda \geq 0$, d'où $\lambda = 0$. Comme $S' - S$ est diagonalisable (symétrique réelle), on a $S' - S = 0$.

Transitivité Soient S_1, S_2 et $S_3 \in S_2(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leq S_2$ et $S_2 \leq S_3$.
$S_2 - S_1 \geq 0$ et $S_3 - S_2 \geq 0$, donc, d'après II.E.2), $\det(S_3 - S1) \geq \det(S_3 - S_2) + \det(S_2 - S_1) \geq 0$.
De plus (d'après II.D.4), $\mathrm{Tr}\,(S_3 - S_2) \geq 0$ et $\mathrm{Tr}\,(S_2 - S_1) \geq 0$, donc $\mathrm{Tr}\,(S_3 - S_1) \geq 0$. Avec II.D.4) (sens réciproque), il vient $S_3 - S_1 \geq 0$, donc $S_1 \leq S_3$.

Conclusion : la relation $\leq$ est bien une relation d'ordre sur $S_2(\mathbb{R})$.

II.H-

II.H.1) Si A et B sont symétriques dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B \leq A$, alors $A - B \geq 0$ donc, avec II.D.2, ${}^tX(A-B)X \geq 0$, et enfin, ${}^tXAX \geq {}^tXBX$.
En appliquant ce résultat à $A_n \leq A_{n+1}$, on montre que $({}^tXA_nX)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et si A est un majorant de la suite (A_n), alors ${}^tXAX$ majore la suite $({}^tXA_nX)_{n\in\mathbb{N}}$.
Ces suites sont donc convergentes, quel que soit le vecteur X choisi.

II.H.2) En notant (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, il vient $a_n = {}^te_1A_ne_1$ et $d_n = {}^te_2A_ne_2$, donc d'après I.H.1), $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes et majorées.

II.H.3) Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc convergentes. Pour $X = {}^t(1,1)$, on a : ${}^tXA_nX = a_n + 2b_n + d_n$, donc $b_n = \dfrac{1}{2}({}^tXA_nX - a_n - d_n)$, ce qui montre que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également.
La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente.

III Matrices symétriques définies positives

III.A- A est symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tP\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)P$ où λ_1, ..., $\lambda_n \geq 0$ sont les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.
On pose $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$ et $Y = \Delta P$. Alors $\det(Y) = \sqrt{\det(A)}\det(P) \neq 0$ et ${}^tYY = {}^tP\Delta^2P = A$, cqfd.

III.B- On pose $U = Y^{-1}$. Alors ${}^tUAU = I_n$. La matrice ${}^tUBU$ est symétrique réelle, donc (théorème spectral !) il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que ${}^tQ{}^tUBUQ = D$.
On constate alors ${}^tQ{}^tUAUQ = {}^tQQ = I_n$, d'où le résultat attendu, avec $T = UQ = Y^{-1}Q$.

III.C-

III.C.1) D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $B = P\mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n){}^tP$ et donc $I_n + B = P\mathrm{diag}(1+\mu_1, \cdots, 1+\mu_n){}^tP$.
On en déduit, comme les μ_i sont tous positifs ou nuls : $\det(I_n+B) = \displaystyle\prod_{i=1}^n(1+\mu_i) \geq 1+\prod_{i=1}^n \mu_i = \det I_n + \det B$, cqfd.

III.C.2) D'après III.B, on peut fixer T inversible telle que ${}^tTAT = I_n$ et ${}^tTBT = D$ avec D diagonale.
Alors $\det({}^tT(A+B)T) = \det(I_n + D) \geq \det(I_n) + \det(D) = \det(t^TAT) + \det({}^tTBT)$.
Pour toute matrice M, $\det({}^tTMT) = \det({}^tT)\det(T)\det(M) = (\det T)^2\det(M)$, avec $(\det T)^2 > 0$. On peut donc simplifier l'inégalité précédente par $(\det T)^2$, et il vient : $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$.

III.D- ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, pour tout $x > 0$, et pour tout $\beta \in]0,1[$, $\beta \ln x + (1-\beta)\ln 1 \leq \ln(\beta x + (1-\beta)1)$. On applique la fonction exponentielle, qui est croissante, il vient : $x^\beta \leq \beta x + (1-\beta)$, cqfd.

III.E- On utilise encore III.B. Soit T inversible tel que ${}^tTAT = I_n$ et ${}^tTBT = D = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$.
Notons que $\mu_i > 0$ pour tout i (attention, les μ_i ne sont pas les valeurs propres de B en général, car T n'est pas nécessairement orthogonale). En effet, comme B est symétrique, il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de B : $(Y_1, \cdots, Y_n)$. On notera $BY_i = \lambda_iY_i$. Par hypothèse, $\lambda_i > 0$. Si $X = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_iY_i \neq 0$, alors ${}^tXBX = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 > 0$. Ainsi, pour tout i, $\mu_i = {}^te_iDe_i = {}^t(Te_i)B(Te_i) > 0$.

Finalement, $\det({}^tT(\alpha A + \beta B)T) = \det(\alpha I_n + \beta D) = \displaystyle\prod_{i=1}^n(\alpha + \beta\mu_i)$.

Or, avec III.D), $\alpha + \beta\mu_i = (1-\beta) + \beta\mu_i \geq \mu_i^\beta$.

On en déduit : $\det({}^tTT)\det(\alpha A + \beta B) \geq \displaystyle\prod_{i=1}^n(\mu_i)^\beta = \det(D)^\beta$.

Maintenant, avec $\det(A) = \dfrac{1}{\det({}^tTT)}$ et $\det(D) = (\det {}^tTT)(\det B)$, il vient : $\det(\alpha A+\beta B) \geq (\det B)^\beta (\det {}^tTT)^{\beta-1} = (\det B)^\beta (\det A)^\alpha$, cqfd.

III.F- Le résultat est vrai de $k = 1$ (clair) et $k = 2$ (démontré au III.E). Soit $k \geq 2$, on suppose l'inégalité vraie de k. Soient A_1, ..., A_{k+1} des matrices définies positives, et α_1, ..., α_{k+1} des réels > 0 tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k+1} = 1$. On considère les matrices $A = \dfrac{\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}$ et $B = A_{k+1}$, avec $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ et $\beta = \alpha_{k+1}$. D'après III.E, $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det A_{k+1})^{\alpha_{k+1}}$.

On applique l'hypothèse de récurrence aux matrices A_i, $1 \leq i \leq k$ et aux coefficients $\beta_i = \dfrac{\alpha_i}{\alpha}$, il vient : $\det(A) = \det(\beta_1 A_1 + \cdots \beta_k A_k) \geq \prod_{i=1}^{k} (\det A_i)^{\beta_i}$, donc $(\det A)^\alpha \geq \prod_{i=1}^{k} (\det A_i)^{\alpha_i}$.

On peut donc conclure : $\det(\alpha A + \beta B) \geq \prod_{i=1}^{k+1} (\det A_i)^{\alpha_i}$, ce qui prouve la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par récurrence.