

Partie I : Un problème aux valeurs propres

1. L'existence de v'' prouve que v est au moins de classe $\mathcal{C}^1$; mais comme $v'' = -\lambda v$, si v est $\mathcal{C}^k$ alors v est de $\mathcal{C}^{k+2}$: par récurrence, on a ainsi prouvé que

$$\boxed{v \text{ est } \mathcal{C}^\infty.}$$

Une intégration par parties permet alors d'écrire, en tenant compte des conditions aux limites (6) :

$$\int_0^\pi v''(x)v(x) dx = [vv']_0^\pi - \int_0^\pi (v'(x))^2 dx = - \int_0^\pi (v'(x))^2 dx$$

Compte-tenu de (5), on a alors : $\int_0^\pi v''(x)v(x) dx = -\lambda \int_0^\pi v^2(x) dx$ si v est non nulle, $\int_0^\pi v^2(x) dx \neq 0$, d'où

$$\boxed{\lambda = \frac{\int_0^\pi (v'(x))^2 dx}{\int_0^\pi v^2(x) dx} \leq 0}$$

2. Soit $\omega > 0$ tel que $\lambda = -\omega^2 < 0$. Les solutions de (5) sont de la forme

$$\boxed{v(x) = \alpha \operatorname{ch}(\omega x) + \beta \operatorname{sh}(\omega x)}$$

où α et β sont des réels. $v(0) = 0$ donne alors $\alpha = 0$. Il reste $\beta \operatorname{sh}(\omega\pi) = 0$ soit $\beta = 0$. On retrouve le résultat de la question précédente :

$$\boxed{\text{si } \lambda \text{ est strictement négatif, la seule solution de (5) et (6) est la fonction nulle.}}$$

Si $\lambda = 0$, $v(x) = ax + b$ et les conditions (6) donnent $a = b = 0$. Pour $\lambda = 0$, la seule solution est la solution nulle.

3. Soit $\lambda = \omega^2 > 0$ avec $\omega > 0$. Les solutions de (5) sont de la forme

$$\boxed{v(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)}$$

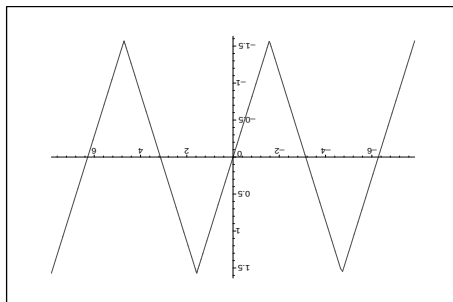
où α et β sont des réels. $v(0) = 0$ donne alors $\alpha = 0$. Il reste $\beta \sin(\omega\pi) = 0$. Cette équation admet une solution avec β non nul si et seulement si $\sin(\omega\pi) = 0$ soit $\omega = n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce dernier cas, β est quelconque donc l'ensemble des solutions est donné par

$$\exists \beta, \forall x \in [0, \pi], v(x) = \beta \sin(nx)$$

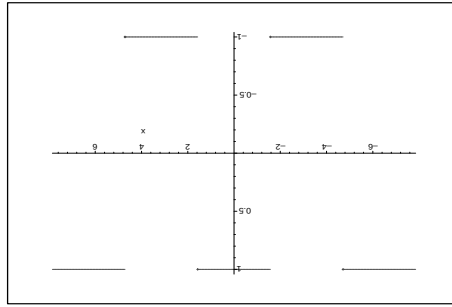
$$\boxed{\text{C'est donc un sous-espace vectoriel de dimension 1 de base } x \mapsto \sin(nx)}$$

Partie II : Série de Fourier de la condition initiale

4. ϕ est une fonction continue affine par morceaux formée de morceaux de pente 1 et -1 alternativement.



5. $\Phi' = (-1)^k$ sur les intervalles $](2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}]$.



6. ϕ étant continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux ainsi que $x \mapsto e^{-nix}$, une intégration par parties donne alors pour n non nul :

$$2\pi c_n(\phi) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) e^{-nix} dx = \underbrace{\left[\phi(x) \frac{e^{-nix}}{-ni} \right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{ni} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi'(x) e^{-nix} dx$$

De plus $c_0(\Phi') = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi'(x) dx = \phi(\pi) - \phi(-\pi) = 0$ ce qui donne le résultat souhaité :

$$\boxed{\forall n, c_n(\Phi') = inc_n(\phi)}$$

7. Par périodicité pour n non nul :

$$2\pi c_n(\Phi') = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-nix} dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-nix} dx = \frac{-1}{ni} \left([e^{-nix}]_{-\pi/2}^{\pi/2} - [e^{-nix}]_{\pi/2}^{3\pi/2} \right) = \frac{2}{ni} \left(e^{ni\pi/2} - e^{-ni\pi/2} \right)$$

soit

$$\boxed{c_n(\Phi') = \frac{2 \sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi}}.$$

On a alors $c_n(\phi) = \frac{2 \sin(\frac{n\pi}{2})}{in^2\pi} = -c_{-n}(\phi)$ soit pour n non nul

$$\boxed{b_n(\phi) = \frac{4 \sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2\pi}}.$$

formule vérifiée pour $n = 0$ puisque la fonction est impaire donc $c_0(\phi) = 0$. La série de Fourier de ϕ fonction impaire est donc $\sum_{n \geq 1} \frac{4 \sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2\pi} \sin(nx)$.

8. Comme $f_n(x) = \frac{4 \sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2\pi} \sin(nx)$ vérifie $\forall x, |f_n(x)| \leq \frac{4}{\pi n^2}$, la convergence de la série de Fourier est donc normale, résultat prévisible par le théorème de convergence normale : ϕ étant continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, ϕ est la somme de sa série de Fourier et la convergence est normale.

Partie III : Construction d'une solution

Cette partie utilise la convergence normale d'une fonction de deux variables (qui est hors programme) et le théorème de continuité d'une série de fonctions continues.

9. $x \mapsto b_n(\phi) \sin(nx)$ et $t \mapsto e^{-n^2 t}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition, donc $(x, t) \mapsto b_n(\phi) \sin(nx)$ et $(x, t) \mapsto e^{-n^2 t}$ sont continues sur $D = [0, \pi] \times [0, \infty[$ et indéfiniment dérivables par rapport à chacune des deux variables sur $D_0 =]0, \pi[\times]0, \infty[$; leur produit u_n est donc continu sur D et indéfiniment dérivable par rapport à chacune des deux variables sur D_0 et :

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) = -n^2 b_n(\phi) \sin(nx) e^{-n^2 t} \text{ et } \frac{\partial^k u_n}{\partial t^k}(x, t) = b_n(\phi) n^k \sin(nx + k\pi/2) e^{-n^2 t}$$

Ainsi $\frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) = -n^2 b_n(\phi) \sin(nx) e^{-n^2 t} = \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}(x, t).$

u_n est continue sur D , indéfiniment dérivable par rapport à x et t sur D_0 et vérifie l'équation de la chaleur.

10. On remarque que sur $\forall (x, t) \in D, |u_n(x, t)| \leq |b_n(\phi)| \leq \frac{4}{\pi n^2}$. La série de fonctions continues est donc normalement convergente sur D :

$$\sum_{n \geq 1} u_n \text{ est convergente sur } D \text{ et sa somme } u \text{ est continue.}$$

11. Par la formule vue précédemment : $\frac{\partial u_n}{\partial t}(\frac{\pi}{2}, 0) = -n^2 b_n(\phi) \sin(\frac{n\pi}{2}) = -\frac{4}{\pi} \sin^2(\frac{n\pi}{2})$. Pour $n = 2p + 1$, ce terme vaut $-\frac{4}{\pi}$; le terme général de la série ne tend pas vers 0, donc :

$$\text{La série } \frac{\partial u_n}{\partial t}(\frac{\pi}{2}, 0) \text{ est divergente.}$$

12. Sur $D_\delta =]0, \pi[\times]\delta, +\infty[$, la majoration $\left| \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) \right| = \frac{4}{\pi} e^{-n^2 \delta} = o(n^{-2})$ prouve la convergence normale de la série $\sum \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t)$.

Soit $x \in]0, \pi[$ et g_x la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g_x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)$ où $g_n(t) = u_n(x, t)$. La série de fonctions $\sum g_n$ est une série de fonctions convergentes de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus sur tout segment $[\delta, \gamma]$ inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$, on a

$$|g'_n(t)| \leq \frac{4}{\pi} e^{-n^2 \delta}$$

ce qui prouve la convergence normale de $\sum_{n \geq 1} g'_n$ sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$. Par théorème de dérivation terme à terme d'une série, g_x est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui prouve que :

$$u \text{ admet une dérivée partielle par rapport à } t \text{ sur } D_0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t).$$

13. Compte-tenu de la question (11), en $(\frac{\pi}{2}, 0)$ la série est divergente ; il ne peut y avoir convergence normale sur un domaine contenant ce point.

Partie IV : Unicité de la solution.

14. Par théorème, comme h présente un extrémum en α point intérieur à I :

$$h'(\alpha) = 0.$$

Par développement limité on a alors

$$h(x) = h(\alpha) + \frac{h''(\alpha)}{2}(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2)$$

d'où

$$h''(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{2(h(x) - h(\alpha))}{(x - \alpha)^2}$$

Comme $\frac{2(h(x) - h(\alpha))}{(x - \alpha)^2} \leq 0$ sur $]a, \alpha[\cup]\alpha, b[$, la limite a le même signe donc :

$$h''(\alpha) \leq 0.$$

15. De même, pour $\varepsilon > 0$, $\frac{h(b) - h(b - \varepsilon)}{\varepsilon} \geq 0$ donc

$$\boxed{h'_g(b) \geq 0.}$$

16. v_ε est continue sur D et comme u , est indéfiniment dérivable par rapport à t et par rapport à x . Or u vérifie (1) sur $]0, \pi[\times]0, +\infty[$ d'où :

$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \iff \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2}(x, t) - 2\varepsilon$$

Supposons que v_ε admet un maximum en (x_0, t_0) sur $\mathcal{D}_i \cup \mathcal{C}$, ces applications partielles présentent aussi un maximum au point correspondant.

La fonction $h : x \mapsto v_\varepsilon(x, t_0)$ est maximale en x_0 et vérifie alors $h'(x_0) = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}(x_0, t_0) = 0$ et $h''(x_0) = \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leq 0$ d'après la question 15.

Compte-tenu de (*), on a alors $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(x_0, t_0) \leq -2\varepsilon < 0$. La fonction $k : t \mapsto v_\varepsilon(x_0, t)$ vérifie donc $k'(t_0) = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(x_0, t_0) < 0$ si $t_0 < T$ et $k'_g(T) = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(x_0, T) < 0$ ce qui est en contradiction avec la maximalité de k en x_0 d'après les résultats des deux questions précédentes. Ainsi, par contradiction, on a vérifié que

$$\boxed{\varepsilon \text{ n'a pas de maximum sur } \mathcal{D}_i \cup \mathcal{C}.}$$

17. M existe puisque $\mathcal{D}$ est un compact sur lequel u est continue. De même, v_ε admet un maximum sur $\mathcal{D}$. Par la question précédente, ce maximum ne peut être atteint sur $\mathcal{D}_i \cup \mathcal{C}$. Ce maximum est donc atteint sur $\mathcal{F}$. Sur le segment de droite $x = 0$, v_ε est nulle donc le maximum est positif et atteint en (x_0, t_0) . On a alors :

$$\forall (x, t) \in \mathcal{D}, v_\varepsilon(x, t) = u(x, t) + \varepsilon x^2 \leq f(x_0) + \varepsilon x_0^2 \leq \max(f) + \varepsilon \pi^2$$

Donc :

$$\forall \varepsilon \forall (x, t) \in \mathcal{D}, u(x, t) \leq \max(f) + \varepsilon(\pi^2 - x^2)$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient donc $\forall (x, t) \in \mathcal{D}, u(x, t) \leq \max(f)$ soit $M \leq \max(f)$. Or $\max f = f(x_1) = u(x_1, 0)$. Ainsi ;

$$\boxed{u \text{ atteint son maximum sur } [0, \pi] \times \{0\} \text{ donc sur } \mathcal{F}.}$$

Remarque : La condition (3) n'intervient pas dans la résolution de cette question : il suffit que f s'annule en 0 et π , ce qui est assuré par la continuité de u sur $\mathcal{D}$.

18. Soient u et v deux solutions de (1), (2) et (3). Alors $w = u - v$ vérifie (1), (2) et (3') condition (3) avec $f = 0$. D'après ce qui précède, w est maximale sur $\mathcal{F}$ où elle est identiquement nulle donc $w = 0$ soit $u = v$.

$$\boxed{\text{La solution de (1), (2) et (3) est donc unique.}}$$

19. Soit $v : \begin{array}{ccc} [0, \pi] \times [0, +\infty[& \mapsto & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & u^2(x, t)/2 \end{array}$

Cette fonction est continue donc continue en t et en x et pour tout segment S inclus dans $\mathbb{R}^+$, elle est bornée sur $[0, \pi] \times S$, elle est bornée (fonction continue sur un compact) d'où par théorème de continuité des intégrales à paramètre, E est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, pour $t > 0$, v est dérivable par rapport à t et $(x, t) \mapsto \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = u(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ est continue en x et en t . De plus cette application est bornée sur $[0, \pi] \times S$ où S est un segment inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$. Par théorème de Leibniz, E est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$E'(t) = \int_0^\pi 2u(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx$$

En utilisant l'équation de la chaleur et une intégration par parties du même style qu'en première question, avec la condition (2) :

$$E'(t) = \int_0^\pi u(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x}(x, t) \, dx = \underbrace{\left[u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 \, dx \leq 0$$

Le raisonnement est similaire à celui de la question précédente : la différence de deux solutions w vérifie (1) et (2). Par ce qui précède, appliquée à w , on obtient que la fonction continue Ew est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ soit

$$\forall t, 0 \leq E_w(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi w^2(x, t) \, dx \leq E_w(0) = \frac{1}{2} \int_0^\pi w^2(x, 0) \, dx = 0$$

donc $\forall t, \int_0^\pi w^2(x, t) \, dx = 0$ ce qui compte-tenu de la continuité de w donne $w = 0$. On retrouve ainsi l'unicité de la solution.