CCP 2012. Option MP. Mathématiques 1.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Exercice 1

1. Dans les deux cas la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont claires (découlant immédiatement de la linéarité et de la positivité de l'intégration). En outre si $\|f\| = 0$ ou $\|f\|' = 0$ il vient $|f(0)| = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}\,t = 0$.
Comme f est $\mathcal{C}^1$, $t \longmapsto |f('(t)|$ est continue sur $[0,1]$ et le théorème de positivité stricte de l'intégration implique que f' est nulle sur l'intervalle $[0,1]$. Donc f y est constante et finalement nulle puisque $f(0) = 0$. $\square$

On a évidemment $\|f\| \leqslant 4|f(0)| + 2\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}\,t = 2\|f|'$ et de même $\|f\|' \leqslant 2\|f\|$. $\square$

2. Notons $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}\,t$ la norme L^1 (bien une norme sur E). Envisageons la suite (f_n) définie par $f_n(t) = t^n$ bien élément de E. Il vient (pour $n \geqslant 1$) $\|f_n\| = 2$ et $\|f\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$. Ainsi la suite (f_n) converge vers la fonction nulle pour la norme L^1 mais pas pour la norme $\|.\|$ $\square$

Exercice 2

1.
- $t \longmapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur J $\quad\forall x \in I$
- $x \longmapsto g(x,t)$ est continue sur J $\quad\forall t \in I$
- Pour tout segment $K = [a,b] \subset I$ il existe une fonction φ_K positive et intégrable sur J telle que $|g(x,t)| \leqslant \varphi_K(t)$ pour tout $x \in K$ et pour tout $t \in J$.

Remarquons que l'hypothèse a priori de l'intégrabilité de $t \longmapsto g(x,t)$ pour tout $x \in I$ n'est pas nécessaire car assurée par les hypothèses ci-dessus.

2. Les deux premières hypothèses sont clairement satisfaites. Quant à la troisième on a non seulement une domination locale en x mais une domination globale par $t \longmapsto \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$ bien intégrable sur $]0,+\infty[$ $\square$

3. Il vient immédiatement que $f_2(0) = 0$ et $f_2(x) = 1$ pour $x > 0$.
Ainsi f_2 est continue sur $]0,+\infty[$ mais pas sur $[0,+\infty|$.
L'hypothèse de domination locale en x est bien assurée sur $]0,+\infty[$: si $0 < a < b$ on a $|g_2(x,t)| \leqslant be^{-at}$ pour $x \in [a,b]$ bien intégrable sur $]0,+\infty[$.
Par contre la discontinuité en 0 prouve que l'hypothèse de domination locale n'est pas réalisée sur un segment $[0,a]$.
$\square$

Exercice 3

Le paramétrage $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$ pour θ variant de $-\pi$ à π fournit immédiatement $\displaystyle\int_{\gamma^+} \omega = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\,\theta = 2\pi$ $\square$

Remarque : Cette forme différentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ et fermée (vérification immédiate) sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. On vérifie facilement qu'elle ne se prolonge pas par continuité en $(0,0)$. Ainsi Ω est le plus grand ouvert sur lequel elle est fermée. Or l'ouvert Ω n'est pas étoilé donc le théorème de Poincaré ne peut s'appliquer ce qui explique que la circulation de ω sur le cercle unité (poutant bien inclus dans Ω sur lequel ω est fermée) n'est pas nulle.

Problème

1. $\sum f_n$ converge normalement sur I si les fonctions f_n sont bornées sur I de manière à assurer l'existence de $\|f_n\|_\infty$ et si $\sum \|f_n\|$ converge.
Si tel est le cas, pour tout $x \in I$ on a $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$ et ainsi la série $\sum |f_n(x)|$ converge par principe de comparaison des séries à termes positifs. $\square$

2. Supposons que $\sum f_n$ converge normalement sur I. Pour $x \in I$ la série $\sum f_n(x)$ converge absolument donc converge puisque $\mathbb{R}$ est complet. Notons $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et $R_n(x) = S(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Il vient :

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\Big| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \underset{\text{DEF}}{=} \varepsilon_n \quad \forall x \in I \quad \forall p \geqslant 1 \qquad \text{avec } \epsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En fixant x et en faisant tendre p vers $+\infty$ il vient $\Big|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\Big| = |R_n(x)| \leqslant \varepsilon_n \quad \forall x \in I$

Ce qui est la définition même de la convergence uniforme sur I de $\sum f_n$. $\square$

3. Pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \sim \dfrac{1}{n}$ ce qui prouve que la série $\sum f_n(x)$ ne converge pas absolument car $\sum |f_n(x)|$ et $\sum \dfrac{1}{n}$ sont de même nature par principe de comparaison des séries à termes positifs. □

Par ailleurs $n \longmapsto \dfrac{x^2+n}{n^2} = \dfrac{x^2}{n^2} + \dfrac{1}{n}$ décroît vers 0 de sorte que la série $\sum f_n(x)$ converge en tant que série alternée relevant du théorème spécial. □

En outre le théorème spécial montre que, pour tout x de $[0,1]$ on a $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{n+2}{(n+1)^2} = \varepsilon_n$ ce qui prouve la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0,1]$. □

On a donc là un exemple de série convergeant uniformément mais pas normalement sur un intervalle.

4. La série $\sum f_n$ avec $f_n(x) = x^n$ converge absolument sur $]-1,1[$ mais pas uniformément. En effet si tel était le cas, comme $\lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x) = 1$, le théorème du double passage à la limite prouverait que la série $\sum 1$ converge. □

Plus directement $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$ donc $\operatorname*{Sup}\limits_{x\in]-1,1[} R_n(x) = +\infty$ et la suite (R_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $]-1,1[$. □

5. La suite (α_n) est évidemment bornée par α_1 et $|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant \alpha_1 x^n$ pour $x \in [0,1[$ donc $\sum f_n(x)$ converge par principe de comparaison des séries à termes positifs. □

6. Une étude des variations de f_n montre immédiatement que $\|f_n\|_\infty = f_n(\dfrac{n}{n+1}) = \dfrac{\alpha_n}{n+1}\Big(\dfrac{n}{n+1}\Big)^n$

Or $\Big(\dfrac{n}{n+1}\Big)^n = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{e}$ donc $\|f_n\|_\infty \sim \dfrac{\alpha_n}{en}$ de sorte que $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ converge (par principe de comparaison des séries à termes positifs). □

7. • Pour $x \in I$, comme déjà noté, on a $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.

• De sorte que, pour tout $x \in I$, en vertu de la décroissance de la suite positive (α_n) :

$|R_n(x)| = \Big|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)\Big| = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_{n+1}x^k(1-x) = \alpha_{n+1}x^{n+1} \leqslant \alpha_{n+1}$

Ainsi si la suite (α_n) décroît vers 0 alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1[$. □

• Réciproquement supposons que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I de sorte que $\operatorname*{Sup}\limits_{x\in I} |R_n(x)| \underset{\text{DEF}}{=} \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Comme la suite (α_n) est une suite décroissante minorée par 0, elle admet une limite $\ell \geqslant 0$ et $\alpha_k \geqslant \ell$ pour tout k.

Il vient alors $\ell x^{n+1} = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \ell x^k(1-x) \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) = R_n(x) = |R_n(x)| \leqslant \varepsilon_n \quad \forall x \in [0,1[\quad \forall n \in \mathbb{N}$

En fixant n et en faisant tendre x vers 1^- il vient $\ell \leqslant \varepsilon_n$ pour tout n.

Puis en faisant tendre n vers $+\infty$ il vient $\ell \leqslant 0$ donc $\ell = 0$ car $\ell \geqslant 0$.

Ainsi la réciproque est-elle vraie et la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite (α_n) tend vers 0. □

8. • Avec $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ la série $\sum f_n$ converge normalement sur I d'après la question 6. □

• Avec $\alpha_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ la série $\sum f_n$ converge simplement sur I mais pas uniformément par les questions 5 et 7. □

• Avec $\alpha_n = \dfrac{1}{\ln n}$ la suite (α_n) décroît vers 0 mais la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ ne converge pas. En effet comme la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ est continue positive et décroissante au voisinage de $+\infty$, la série est de même nature que $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x\ln x}$ elle même de même nature que $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{du}{u}$ (par le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $x \longmapsto u = \ln x$ d'un voisinage de $+\infty$ sur un voisinage de $+\infty$) donc divergente.

Ainsi $\sum f_n$ converge uniformément mais pas normalement sur I par les questions 6 et 7. □

9. $\Big($CV normale$\Big) \Longrightarrow \Big($CV uniforme$\Big) \Longrightarrow \Big($CV simple$\Big)$ (toutes réciproques fausses)

$\Big($CV normale$\Big) \Longrightarrow \Big($CV absolue$\Big) \Longrightarrow \Big($CV simple$\Big)$ ($\mathbb{R}$ est complet) (toutes réciproques fausses)

Aucune implication entre convergence uniforme et convergence absolue.

FIN