

- I - 1.** • Supposons que  $f$  soit cyclique : soit  $x_0$  tel que  $b = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  soit une base ; alors  $f^n(x_0)$  se décompose dans  $b$  :  $f^n(x_0) = -a_0x_0 - a_1f(x_0) - \dots - a_{n-1}f^{n-1}(x_0)$  ;

et la matrice de  $f$  dans  $b$  est donc : 
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- Réciproquement : supposons que la matrice de  $f$  dans la base  $(e_i)_{[1,n]}$  soit  $C$ .

Alors  $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3, \dots, f(e_{n-1}) = e_n$  ; d'où  $e_2 = f(e_1), e_3 = f^2(e_1), \dots, e_n = f^{n-1}(e_1)$  ; la famille  $(e_1, f(e_1), \dots, f^{n-1}(e_1))$  est donc une base de  $E$  ; on en déduit que  $f$  est cyclique.

- I - 2.** J'effectue l'opération élémentaire :  $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + X^2L_3 + \dots + X^{n-1}L_n$  dans le déterminant de la matrice  $C - XI_n$  ; on a donc :

$$\begin{aligned} P_C = \det(C - XI_n) &= \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -X & \cdots & 0 & -a_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -X & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -X - a_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 - a_1X - \cdots - a_{n-1}X^{n-1} - X^n \\ 1 & -X & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -X & \cdots & 0 & -a_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -X & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -X - a_{n-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

et je développe ce dernier déterminant par rapport à sa première ligne :

$$P_C = (-1)^{n+1}(-X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1X - a_0) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -X & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -X \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n Q$$

On conclut :  $\boxed{P_C = (-1)^n Q}$

- Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est unique ; d'autre part, d'après l'égalité précédente, les coefficients de la matrice compagne de l'endomorphisme cyclique  $f$  sont déterminés à partir de  $P_f$  ;

d'où l'unicité de la matrice compagne d'un endomorphisme cyclique donné.

- I - 3.** • Pour tout  $\lambda \in \mathbf{C}$  (en particulier si  $\lambda$  est valeur propre de  $C$ ), la sous-matrice de  $C - \lambda I$  formée des lignes  $2, \dots, n$  et des colonnes  $1, \dots, n-1$  est inversible (son déterminant est 1) ; le rang de  $C - \lambda I$  est donc  $n-1$ . Donc les sous-espaces propres de  $C$  sont tous de dimension 1.

- On vérifie que, pour  $\lambda$  valeur propre de  $C$ , le vecteur colonne 
$$\begin{pmatrix} \lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_2\lambda + a_1 \\ \lambda^{n-2} + a_{n-1}\lambda^{n-3} + \cdots + a_2 \\ \vdots \\ \lambda + a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$
 est un

vecteur propre de  $C$  pour la valeur propre  $\lambda$  ;  
ce vecteur engendre donc  $E_C(\lambda)$ .

**II - 4.**  $x_0$  désignera un élément vérifiant  $f^{n-1}(x_0) \neq 0$  (on suppose l'existence d'un tel élément).

- On va prouver que la famille  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est libre :  
on part d'une combinaison linéaire nulle :  $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$  ;  
et on en prend successivement l'image par  $f^{n-1}, f^{n-2}, \dots, f, I$  ; d'où  $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$  ;  
donc  $f$  est cyclique.

- La matrice de  $f$  dans la base  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est la matrice compagne de  $f$  :  $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Le rang de  $J_n$  est  $n - 1$  ; la dimension du noyau de  $f$  est donc 1 (voir également la question **I - 3.**).

**II - 5.** On posera, pour tout  $j \in \mathbf{N}$ ,  $N_j = \text{Ker } f^j$  et  $n_j = \dim N_j$ .

a) La suite  $(N_k)_{k \in \mathbf{N}}$  est croissante : pour tout  $x$ , si  $x$  appartient à  $N_k$ , alors  $x$  appartient à  $N_{k+1}$ .

D'autre part, si  $x$  appartient à  $N_{k+1}$ , alors  $f^k(f(x)) = 0$  ; on en déduit donc que  $f(N_{k+1}) \subset N_k$

b)  $\text{Ker } \varphi$  est l'ensemble des  $x \in N_{k+1}$  qui vérifient  $f(x) = 0$  ; d'où  $\text{Ker } \varphi = N_1$ .

Donc :  $\text{rang } \varphi = \dim N_{k+1} - \dim \text{Ker } \varphi = n_{k+1} - 1 \leq \dim N_k = n_k$  ; d'où  $n_{k+1} \leq 1 + n_k$ .

c) La suite  $(n_j)$  est croissante (car  $N_j \subset N_{j+1}$ ).

Supposons que, pour un entier  $j$ ,  $n_j$  soit égal à  $n_{j+1}$  ; on a donc  $N_j = N_{j+1}$  ;

soit  $x \in N_{j+2}$  ; alors  $f^{j+2}(x) = 0 = f^{j+1}(f(x))$ , donc  $f(x) \in N_{j+1} = N_j$  ; donc  $f^j(f(x)) = 0$ , c'est à dire que  $x$  appartient à  $N_{j+1}$  ;

on en déduit que  $N_{j+2} \subset N_{j+1}$ , donc  $N_{j+2} = N_{j+1}$ .

On conclut : pour tout  $j$ , si  $n_j = n_{j+1}$ , alors  $n_{j+1} = n_{j+2}$  ; l'égalité  $n_k = n_{k+1}$  implique donc que, pour tout  $j \geq k$ ,  $n_j = n_k$ .

La suite  $(n_i)$  est donc croissante, et devient stationnaire dès que deux termes successifs sont égaux.

- On a  $f^p = 0$  et  $f^{p-1} \neq 0$ .

En appliquant ce qui précède on obtient, avec l'hypothèse  $n_1 = 1 : 1 = n_1 < n_2 < \dots < n_{p-1} < n_p = n$  ; avec, de plus, pour tout  $i$  de  $[1, p-1]$ ,  $n_{i+1} \leq 1 + n_i$ .

Donc, pour tout  $i$  de  $[1, p]$ ,  $n_i = i$  ; d'où  $n_p = p = n$ .

Conclusion :  $p = n$ , et, pour tout  $k \in [0, n]$ ,  $n_k = k$ .

**III - 6.**  $f$  est supposé cyclique : soit  $x_0$  tel que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$  ;

si  $\alpha_0 I + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1} = 0$  est une combinaison linéaire nulle de  $(I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$  ; en prenant l'image de  $x_0$ , on obtient  $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$  ; d'où l'on déduit que les  $\alpha_i$  sont tous nuls ;

donc :  $f$  cyclique  $\implies (I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$  est libre.

**III - 7.a)** Les endomorphismes  $f$  et  $(f - \lambda_k)^{m_k}$  commutent, donc  $E_k$  noyau de  $(f - \lambda_k I)^{m_k}$  est stable par  $f$ .

Les polynômes  $(X - \lambda_k)^{m_k}$ , pour  $1 \leq k \leq p$ , sont deux à deux étrangers ; le théorème de décomposition des noyaux permet donc de conclure que  $\text{Ker } P_f(f) = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ , avec  $P_f(f) = 0$  par le théorème de Cayley-Hamilton ; donc  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$

b)  $\varphi_k^{m_k}$  est l'endomorphisme nul de  $E_k$  : en effet, pour tout  $x$  de  $E_k$ ,  $\varphi_k^{m_k}(x) = (f - \lambda_k I)^{m_k}(x) = 0$ .

- Je désigne par  $f_k$  l'endomorphisme de  $E_k$  induit par  $f$ .

Le polynôme  $(X - \lambda_k)^{m_k}$  appartient à l'annulateur de  $f_k$  ; le spectre de  $f_k$  est donc réduit à  $\{\lambda_k\}$ .

On en déduit que le polynôme caractéristique de  $f_k$  est :  $P_{f_k} = (\lambda_k - X)^{\dim E_k}$ .

L'égalité  $E = \bigoplus E_k$  implique que le polynôme caractéristique de  $f$  est  $P_f = \prod_k (\lambda_k - X)^{\dim E_k}$ .

En comparant à la définition de  $P_f$  :  $P_f = \prod_k (\lambda_k - X)^{m_k}$ , on conclut : pour tout  $k$ ,  $\dim E_k = m_k$ .

- Supposons que  $\varphi_k^{m_k-1} = 0$ . Alors le polynôme  $Q = (\lambda_k - X)^{m_k-1} \prod_{i \in [1, p] \setminus \{k\}} (\lambda_i - X)^{m_i}$  appartiendrait à

l'annulateur de  $f$  ; or le degré de  $Q$  est  $n - 1$  ;

on en déduirait donc une relation de dépendance pour la famille  $(I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$  (il suffit pour cela d'écrire  $Q(f) = 0$ ) ce qui est contraire à l'hypothèse ; conclusion :  $\varphi_k^{m_k-1} \neq 0$ .

c) On peut donc appliquer à  $\varphi_k$  le résultat de **II-4.** : il existe une base de  $E_k$  dans laquelle la matrice de  $\varphi_k$  est

$$J_{m_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ d'ordre } m_k = \dim E_k.$$

Dans cette base,  $f_k$  est représentée par la matrice  $\lambda_k I_{m_k} + J_{m_k} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$ .

d) Soit  $M$  la matrice compagne du polynôme caractéristique  $P_f$  de  $f$ , et  $g$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base canonique est  $M$  ;

d'après la première question,  $g$  est cyclique, et, d'après la seconde question,  $P_g = P_f = P_M$ .

•  $g$  étant cyclique, la famille  $(I, g, g^2, \dots, g^{n-1})$  est libre ; on peut donc appliquer les questions **7. a, b** et **c** : il existe une base  $\mathcal{B}'$  dans laquelle la matrice  $M'$  de  $g$  est diagonale par blocs, de blocs diagonaux :  $\lambda_k I_{m_k} + J_{m_k}$  (étant donné que  $P_g = P_f = \prod (\lambda_k - X)^{m_k}$ ).

•  $M$  et  $M'$  sont semblables (elles représentent le même endomorphisme  $g$ ).

$M$  est cyclique ; donc  $M'$  est cyclique ; or  $M'$  est la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$  ; on conclut que  $f$  est cyclique.

**III - 8. a)** • Soit  $\psi(\lambda) = \det(Q_1 + \lambda Q_2)$ .  $\psi$  est un polynôme à coefficients réels, vérifiant  $\psi(i) = \det Q \neq 0$ .

$\psi$  n'est donc pas le polynôme nul ; il existe donc un réel  $\lambda_0$  tel que  $\psi(\lambda_0)$  soit non nul.

•  $A = QBQ^{-1}$  ; d'où  $AQ = QB$ , c'est à dire :  $A(Q_1 + iQ_2) = (Q_1 + iQ_2)B$ , avec  $A, B, Q_1, Q_2$  matrices à coefficients réels ; donc  $AQ_1 = Q_1B$  et  $AQ_2 = Q_2B$ .

On en déduit que  $A(Q_1 + \lambda_0 Q_2) = (Q_1 + \lambda_0 Q_2)B$  ; la matrice  $P = (Q_1 + \lambda_0 Q_2)$  appartient à  $\mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$  car son déterminant égal à  $\psi(\lambda_0)$  est non nul, et ses coefficients sont réels ; d'autre part, on a  $A = PBP^{-1}$ .

Donc : si  $A$  et  $B$ , à coefficients réels, sont semblables sur  $\mathbf{C}$ , elles le sont sur  $\mathbf{R}$ .

b) Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que la famille  $(I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$  soit libre.

Son polynôme caractéristique est noté  $P_f = (-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0) \in \mathbf{R}[X]$ .

Soit  $M$  la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $E$  ; on peut lui appliquer le résultat de la question **7**, en la considérant comme matrice à coefficients complexes :

$(I, M, \dots, M^{n-1})$  est une famille libre ;  $M$  est donc cyclique, et il s'ensuit, d'après la question **1.**, que  $M$  est

semblable sur  $\mathbf{C}$  à la matrice  $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ .

Les deux matrices  $M$  et  $C$  sont à coefficients réels et sont semblables sur  $\mathbf{C}$  ; d'après la question **8. a**, on peut affirmer qu'elles sont semblables sur  $\mathbf{R}$  ; il existe donc une base  $\mathcal{B}'$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'} f = C$  ; donc  $f$  est cyclique.

Conclusion : que le corps de base soit  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , on a l'équivalence :

$$f \text{ est cyclique} \iff (I, f, f^2, \dots, f^{n-1}) \text{ est libre.}$$

**IV - 9. a)** On montre aisément que, pour tout  $i \in [0, n-1]$ ,  $g(f^i(x_0)) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(f^i(x_0))$  ; on en conclut que

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k \text{ (en effet ces deux endomorphismes coïncident sur une base).}$$

b) Il est clair que  $\mathbf{K}[f] \subset \mathcal{C}(f)$ , et le résultat précédent donne l'inclusion réciproque.

Mieux : d'après **a**), si  $g$  appartient à  $\mathcal{C}(f)$ , il existe  $R \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$  tel que  $g = R(f)$ .

On a unicité de  $R$  : l'égalité  $R_1(f) = R_2(f)$ , avec  $R_1$  et  $R_2$  polynômes de degrés  $\leq n-1$ , implique que  $R_1 = R_2$  (car  $(I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$  est libre).

Donc : si  $f$  est cyclique, le commutant de  $f$  est de dimension  $n$ , égal à  $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ .

**IV - 10.** •  $f$  étant un endomorphisme quelconque de  $E$ , on montre que la dimension de  $\mathbf{K}[f]$  est  $\leq n$  :  
soit  $A$  un élément quelconque de  $\mathbf{K}[X]$  ; j'effectue la division euclidienne de  $A$  par  $P_f$  :  $A = P_f.Q + R$  avec  $R$  de degré  $\leq n-1$  ;

on a donc  $A(f) = P_f(f) \circ Q(f) + R(f) = R(f)$  ( $P_f(f)$  est nul par le théorème de Cayley-Hamilton) ;  
on peut donc affirmer que  $A(f)$  appartient au sous-espace de  $\mathcal{L}(E)$  engendré par  $(I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ .

On en déduit : Conclusion :  $\mathbf{K}[f] \subset \mathbf{K}_{n-1}[f]$  est de dimension  $\leq n$ .

• D'autre part, on a l'inclusion  $\mathbf{K}_{n-1}[f] \subset \mathcal{C}(f)$ , et l'énoncé donne :  $\dim \mathcal{C}(f) \geq n$ .

• De ce qui précède on déduit que, si  $\mathcal{C}(f) = \mathbf{K}[f]$ , alors  $\mathbf{K}[f] = \mathbf{K}_{n-1}[f]$  qui est de plus de dimension  $n$  ; donc  $(I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$  est libre.

Conclusion :  $f$  est cyclique si et seulement si  $\mathbf{K}[f] = \mathcal{C}(f)$

**V - 11. a)** On a  $f^p(x_0) = x_0$  ; donc, pour tout  $i \in [0, p-1]$ ,  $f^p(f^i(x_0)) = f^i(x_0)$ .

Les endomorphismes  $f^p$  et  $I$  coïncident sur une base ; on en déduit que  $f^p = I$ .

b)  $\mathcal{E}$  est un ensemble non vide d'entiers, majoré par  $n = \dim E$  ;  $\mathcal{E}$  admet donc un plus grand élément  $m \leq n$ .

c) • Par définition de  $m$ ,  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$  est une famille libre  
et la famille  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0), f^m(x_0))$  est liée.

On en déduit que  $f^m(x_0)$  appartient à  $\text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$  ;

d'où, par récurrence sur  $k$  : pour tout  $k \geq m$ ,  $f^k(x_0)$  appartient à  $\text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ .

• On a donc : pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,  $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$  ;

or  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$  est une famille génératrice de  $E$  ;

on conclut que tout vecteur de  $E$  est combinaison linéaire de  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ .

Conclusion :  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$  est une base de  $E$ , donc  $f$  est cyclique, et  $m = n = \dim E$ .

•  $X^p - 1$ , polynôme scindé de racines simples appartient à l'anneau de  $f$  ;  $f$  est donc diagonalisable.

D'autre part, il a été établi (question 3) que les sous-espaces propres de  $f$  sont de dimension 1 ; on en conclut que  $f$  admet  $n$  valeurs propres distinctes.

**V - 12.** D'après ce qui précède,  $b = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$ .

La matrice compagne de  $f$  est donc  $C = \text{Mat}_b f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On a  $C.U_k = \begin{pmatrix} \bar{\omega}^{nk} \\ \bar{\omega}^k \\ \vdots \\ \bar{\omega}^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \omega^k U_k$  donc  $U_k$  est vecteur propre de  $C$  pour la valeur propre  $\omega^k$

**V - 13.** • Si  $z$  est racine  $n$ -ème de l'unité, on a :  $\sum_{k=1}^n z^k = \begin{cases} n & \text{si } z = 1 \\ z \frac{1-z^n}{1-z} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

• Soit  $\alpha_{r,s}$  le terme général de  $M.\overline{M}$  :

$$\alpha_{r,s} = \sum_{k=1}^n m_{r,k} \overline{m}_{k,s} = \sum_{k=1}^n \bar{\omega}^{rk} \omega^{ks} = \sum_{k=1}^n (\omega^{s-r})^k = \begin{cases} n & \text{si } \omega^{s-r} = 1, \text{ c'est à dire si } r = s, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc  $M.\overline{M} = nI$ , d'où :  $M$  est inversible, avec  $M^{-1} = \frac{1}{n} \overline{M}$ .

**V - 14** • D'après la question 12,  $C$  admet  $n$  valeurs propres :  $\omega^k$ , pour  $k = 1 \dots n$ ,  
et les vecteurs  $(U_1, \dots, U_n)$  constituent une base de vecteurs propres.

(La question 13 permet de prouver directement que  $(U_1, \dots, U_n)$  est une base ; en effet  $M$  est la matrice, dans la base canonique de  $\mathbf{C}^n$ , de  $(U_0, U_1, \dots, U_n)$ .)

• D'autre part, on vérifie aisément que  $A = a_0 I + a_1 C + a_2 C^2 + \dots + a_{n-1} C^{n-1}$

D'où, pour  $k \in [1, n]$ ,  $AU_k = (a_0 + a_1 \omega^k + \dots + a_{n-1} \omega^{k(n-1)}) U_k$ .

Soit  $P$  le polynôme  $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$  ; l'égalité précédente permet d'affirmer que

$(U_1, \dots, U_n)$  est une base propre pour  $A$ , donc  $A$  est diagonalisable,  
les valeurs propres correspondant étant  $P(\omega), P(\omega^2), \dots, P(\omega^n)$ .