Etude d'une famille de suites récurrentes

Dans tout ce problème a désigne un réel.
On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.
Le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.

La partie I étudie le cas où P est constant.
La partie II étudie le cas où $a \neq 1$.
La partie III étudie le cas où $a = 1$.

Partie I

Dans cette partie, on pose $E_a^{(0)} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \exists b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b\right\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(0)}$. Il existe donc b réel tel que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = au_n + b$.
   Montrer l'unicité de b. On notera $b = b_u$ pour $u \in E_a^{(0)}$.

2.a Déterminer $E_1^{(0)}$.

2.b Déterminer $E_0^{(0)}$.

Dans le reste de cette partie, a est supposé différent de 1.

3. Montrer que $E_a^{(0)}$ est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

4. Soit x la suite constante égale à 1 (pour tout n de $\mathbb{N}$, $x_n = 1$) et soit y la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $y_n = a^n$.
   Montrer que (x,y) est une famille libre de $E_a^{(0)}$. On précisera les valeurs de b_x et b_y.

5. Soit $u \in E_a^{(0)}$.

5.a Montrer qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que $\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$.

5.b Montrer que pour λ et μ définis à la question précédente, pour tout n de $\mathbb{N}$,
   $u_n = \lambda x_n + \mu y_n$.

5.c Que peut-on en conclure ?

6. Déterminer $E_a^{(0)}$. On donnera en particulier la dimension de $E_a^{(0)}$.

Partie II

Dans cette partie, on suppose $a \neq 1$.
On fixe un entier naturel p. On note $\mathbb{R}_p[X]$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degrés inférieurs ou égaux à p.
On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale.
On pose $E_a^{(p)} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \exists P \in \mathbb{R}_p[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)\right\}$

1.a On considère l'application φ de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$ définie par : $\varphi(P) = \big(P(0), P(1), \ldots, P(p)\big)$).
   Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ - espaces vectoriels.

1.b Soit $u \in E_a^{(p)}$. Il existe $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)$.
   Montrer l'unicité de P. On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.

2. Montrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

3. Montrer que l'application θ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u)=P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

4. Déterminer $\ker\theta$ (noyau de θ).

5. Pour $k\in\mathbb{N}$, on pose $Q_k=(X+1)^k-aX^k$.

5.a Quel est le degré de Q_k ?

5.b Montrer que la famille $(Q_0,Q_1,\ldots,Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

6.a Montrer que pour tout k dans $\{0,1,\ldots,p\}$, Q_k est dans l'image de θ, notée $\operatorname{Im}\theta$.

6.b Que peut-on en conclure ?

7. Déduire des questions précédentes la dimension de $E_a^{(p)}$.

8. Pour $k\in\{0,1,\ldots,p\}$, on pose $x^{(k)}$ la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $x_n^{(k)}=n^k$.
On rappelle que y est la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $y_n=a^n$.
Montrer que $(x^{(0)},\ldots,x^{(p)},y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.

9. Application : déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=2u_n-2n+5\\ u_0=-2\end{cases}.$$

Partie III

Dans cette partie, on suppose que $a=1$.

1. En adaptant les résultats obtenus à la partie précédente, déterminer :
$E_1^{(p)}=\left\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\exists P\in\mathbb{R}_p[X],\forall n\in\mathbb{N},u_{n+1}=u_n+P(n)\right\}$.

2. Application : déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n-6n+1\\ u_0=-2\end{cases}.$$

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S par une méthode due à Stirling.
On désigne par :

- E l'espace vectoriel des fonctions continues de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$.
- f_k la fonction de E définie pour tout nombre entier naturel k par :

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+k)} \text{ pour } k \geq 1.$$

- Δ l'application associant à toute fonction f de E la fonction Δf définie pour $x > 0$ par :

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

1°) <u>Sommation de séries télescopiques</u>

a) Etablir que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

b) Etablir pour toute fonction f appartenant à E la convergence de la série $\Sigma(\Delta f)(p)$ avec $p \geq 1$ et calculer pour tout nombre entier naturel n les sommes suivantes :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (\Delta f)(p) \quad ; \quad \sum_{p=n+1}^{+\infty} (\Delta f)(p).$$

c) Exprimer Δf_{k-1} en fonction de k et de f_k pour $k \geq 1$.

d) Etablir pour tout nombre entier naturel $k \geq 1$ la convergence de la série $\Sigma f_k(p)$ et vérifier pour tout nombre entier naturel n que :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}.$$

2°) <u>Accélération de la convergence de (S_n)</u>

a) Etablir la relation suivante pour $p \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} (k-1)!\, f_k(p) = \frac{q!}{p} f_q(p).$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}.$$

c) En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite (S_n') de nombres rationnels telle que :

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S_n' \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}.$$

Expliciter S_n' et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

d) Ecrire en PASCAL un algorithme calculant et affichant S_n' pour $q = 2$ lorsque n est donné.