Correction

d'après Mines de Sup 2001

Partie I

1. $b = u_1 - au_0$ donc b est déterminé de manière unique.

2.a $E_1^{(0)}$ correspond à l'ensemble des suites arithmétiques i.e. l'ensemble des suites réelles pour lesquelles il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nb$.

2.b $E_0^{(0)}$ correspond à l'ensemble des suites constantes à partir du rang 1.

3. $E_a^{(0)} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, en prenant $b = 0$, la suite nulle appartient à $E_a^{(0)}$.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $(u_n),(v_n) \in E_a^{(0)}$.
$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = a(\lambda u_n + \mu v_n) + b$ avec $b = \lambda b_u + \mu b_v$ donc $\lambda(u_n) + \mu(v_n) \in E_a^{(0)}$.
Ainsi $E_a^{(0)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et c'est un donc un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel .

4. Supposons $\lambda x + \mu y = 0$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda.1 + \mu a^n = 0$.
Pour $n = 0$, on a $\lambda + \mu = 0$ et pour $n = 1$, on a $\lambda + a\mu = 0$.
$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + a\mu = 0 \end{cases} \begin{cases} \lambda = -\mu \\ (a-1)\mu = 0 \end{cases} \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$ puisque $a \neq 1$.
Ainsi (x,y) est une famille libre.
$x \in E_a^{(0)}$ avec $b_x = 1 - a$ car $1 = a.1 + (1-a)$.
$y \in E_a^{(0)}$ avec $b_y = 0$ car $a^{n+1} = a.a^n + 0$.

5.a $\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda + a\mu = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = u_0 - \mu \\ (a-1)\mu = u_1 - u_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = (au_0 - u_1)/(a-1) \\ \mu = (u_1 - u_0)/(a-1) \end{cases}$.

5.b Convenons de poser $b = b_u$.
$b = u_1 - au_0 = \lambda(x_1 - ax_0) + (y_1 - ay_0) = \lambda b_x + \mu b_y$ (en fait $u \mapsto b_u$ est linéaire).
Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$:
$u_{n+1} = au_n + b \underset{HR}{=} a(\lambda x_n + \mu y_n) + \lambda b_x + \mu b_y = \lambda(ax_n + b_x) + \mu(ay_n + b_y) = \lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1}$.
Récurrence établie.

5.c La famille (x,y) est génératrice de $E_a^{(0)}$ puisque $\forall u \in E_a^{(0)}, \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}, u = \lambda.x + \mu.y$.
Ainsi (x,y) est une base de $E_a^{(0)}$.

6. $E_a^{(0)} = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda + \mu a^n\right\}$ et $\dim E_a^{(0)} = 2$.

Partie II

1.a L'application φ introduite est clairement une application linéaire.
Si $P \in \ker \varphi$ alors $P \in \mathbb{R}_p[X]$ et $P(0) = P(1) = \ldots = P(p) = 0$.
P étant de degré inférieur à p et possédant $p+1$ racines, c'est le polynôme nul.
Ainsi φ est une application linaire injective.
De plus $\dim \mathbb{R}_p[X] = p + 1 = \dim \mathbb{R}^{p+1}$ donc par le théorème d'isomorphisme c'est un isomorphisme.

1.b Si P et $\tilde{P}$ sont deux polynômes solutions du problème posé alors :
$\varphi(P) = (u_1 - au_0, u_2 - au_1, \ldots, u_{p+1} - au_p) = \varphi(\tilde{P})$ et par injectivité de φ on obtient $P = \tilde{P}$.
Le polynôme P est donc unique.

2. $E_a^{(p)} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la suite nulle appartient à $E_a^{(p)}$ (en prenant $P=0$).

Soit $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ et $(u_n),(v_n) \in E_a^{(p)}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \lambda(au_n + P_u(n)) + \mu(av_n + P_v(n)) = a(\lambda u_n + \mu v_n) + P(n)$

avec $P = \lambda P_u + \mu P_v$ $(= P_{\lambda u+\mu v})$. Ainsi $\lambda(u_n) + \mu(v_n) \in E_a^{(p)}$.

$E_a^{(p)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, c'est donc un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel .

3. En vertu des calculs ci-dessus :

$\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \forall (u_n),(v_n) \in E_a^{(p)}$ on a $P_{\lambda u+\mu v} = \lambda P_u + \mu P_v$ i.e. $\theta(\lambda u + \mu v) = \lambda\theta(u) + \mu\theta(v)$.

Ainsi θ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ vers $\mathbb{R}_p[X]$.

4. Soit $u \in \ker\theta$. On a $P_u = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n$ puis $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n u_0$

$\ker\theta = \mathrm{Vect}(y)$ avec $y = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5.a Puisque $a \neq 1$ et $Q_k = (1-a)X^k + \sum_{\ell=0}^{k-1} C_k^\ell X^\ell$ on a $\deg Q_k = k$.

5.b La famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_p)$ est une famille de polynômes de degrés étagés, c'est donc une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

6.a Soit $k \in \{0,1,\ldots,p\}$ et u la suite de terme général $u_n = n^k$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n+1)^k = an^k + (n+1)^k - an^k = au_n + Q_k(n)$.

Ainsi $u \in E_a^{(p)}$ et $\theta(u) = Q_k$ d'où $Q_k \in \mathrm{Im}\,\theta$.

6.b L'application linéaire θ est surjective car $\mathbb{R}_p[X] = \mathrm{Vect}(Q_0,\ldots,Q_p) \subset \mathrm{Im}\,\theta$ puis $\mathbb{R}_p[X] = \mathrm{Im}\,\theta$.

7. En vertu du théorème du rang : $\dim E_a^{(p)} = \mathrm{rg}(\theta) + \dim\ker\theta = (p+1)+1 = p+2$.

8. On a déjà vu ci-dessus $x^{(0)},\ldots,x^{(p)},y \in E_a^{(p)}$.

Supposons $\lambda_0 x^{(0)} + \cdots + \lambda_p x^{(p)} + \mu y = 0$.

En appliquant θ on obtient : $\lambda_0\theta(x^{(0)}) + \cdots + \lambda_p\theta(x^{(p)}) + \mu\theta(y) = 0$ i.e. $\lambda_0 Q_0 + \cdots + \lambda_p Q_p + \mu \times 0 = 0$.

Or $(Q_0,\ldots,Q_p)$ est libre donc $\lambda_0 = \ldots = \lambda_p = 0$.

La relation initiale donne alors $\mu y = 0$ et puisque $y \neq 0$ on obtient aussi $\mu = 0$.

Finalement la famille $(x^{(0)},\ldots,x^{(p)},y)$ est libre.

$(x^{(0)},\ldots,x^{(p)},y)$ est une famille libre formée de $p+2 = \dim E_a^{(p)}$ éléments de $E_a^{(p)}$, c'est donc une base de $E_a^{(p)}$.

9. $u_n \in E_2^{(1)}$ donc $\exists!(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha + \beta n + \gamma 2^n$.

$u_0 = -2$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 5$ donc

$$\begin{cases} \alpha+\gamma=-2 \\ \alpha+\beta+2\gamma=1 \\ \alpha+2\beta+4\gamma=5 \end{cases} \begin{cases} \alpha=-2-\gamma \\ \beta+\gamma=3 \\ 2\beta+3\gamma=7 \end{cases} \begin{cases} \alpha=-2-\gamma \\ \beta=3-\gamma \\ \gamma=1 \end{cases} \begin{cases} \alpha=-3 \\ \beta=2 \\ \gamma=1 \end{cases}$$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -3 + 2n + 2^n$.

Partie III

1. Les questions 1,2,3,4 de la partie II se reprennent dans les mêmes termes en notant que cette fois-ci $\ker\theta = \mathrm{Vect}(y)$ où y est la suite constante égale à 1.

Pour $k = \{0,1,\ldots,p\}$, posons $Q_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$ polynôme de degré k .

Pour $x^{(k)}$ la suite définie par $x_n^{(k)} = n^{k+1}$ on observe $x^{(k)} \in E_1^{(p)}$ avec $\theta(x^{(k)}) = P_{x^{(k)}} = Q_k$.

La famille $(Q_0,\ldots,Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$ (car formée de polynômes de degrés étagés) et les Q_k appartiennent à $\mathrm{Im}\,\theta$. Par suite $\mathrm{Im}\,\theta = \mathbb{R}_p[X]$.

Comme en 7, on obtient $\dim E_1^{(p)} = p+2$.

Comme en 8, la famille $(x^{(0)},\dots,x^{(p)},y)$ est une base de $E_1^{(p)}$. Ainsi

$$\begin{aligned}E_1^{(p)} &= \left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\exists(\lambda_0,\dots,\lambda_p,\mu)\in\mathbb{R}^{p+2},\forall n\in\mathbb{N},u_n=\lambda_0 n+\cdots+\lambda_p n^{p+1}+\mu\right\}\\ &= \left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\exists Q\in\mathbb{R}_{p+1}[X],\forall n\in\mathbb{N},u_n=Q(n)\right\}\end{aligned}$$

2. $(u_n)\in E_1^1$ donc $\exists!(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},u_n=\alpha+\beta n+\gamma n^2$.

$u_0=-2$, $u_1=-1$ et $u_2=-6$ donc

$$\begin{cases}\alpha=-2\\ \alpha+\beta+\gamma=-1\\ \alpha+2\beta+4\gamma=-6\end{cases}\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta+\gamma=1\\ \beta+2\gamma=-2\end{cases}\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=4\\ \gamma=-3\end{cases}.$$

Finalement $\forall n\in\mathbb{N},u_n=-2+4n-3n^2$.

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S par une méthode due à Stirling.
On désigne par :

- E l'espace vectoriel des fonctions continues de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$.
- f_k la fonction de E définie pour tout nombre entier naturel k par :

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)...(x+k)} \text{ pour } k \geq 1.$$

- Δ l'application associant à toute fonction f de E la fonction Δf définie pour $x > 0$ par :

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

1°) Sommation de séries télescopiques

a) Établir que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

Il est évident que Δ est linéaire et que, si f est définie continue sur $\mathbb{R}_+^*$, de limite nulle en $+\infty$, Δf est définie continue sur $\mathbb{R}_+^*$, de limite nulle en $+\infty$: Δ est un endomorphisme de E.

---

b) Établir pour toute fonction f appartenant à E la convergence de la série $\Sigma(\Delta f)(p)$ avec $p \geq 1$ et calculer pour tout nombre entier naturel n les sommes suivantes :

$$\sum_{p=1}^{+\infty}(\Delta f)(p), \qquad \sum_{p=n+1}^{+\infty}(\Delta f)(p).$$

Regardons la somme partielle de cette série,

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n}(\Delta f)(p) &= \sum_{p=1}^{n}\big(f(p+1)-f(p)\big)\\ &= f(n+1)-f(1),\end{aligned}$$

puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$, $\left(\sum\limits_{p=1}^{n}(\Delta f)(p)_{n\in\mathbb{N}^*}\right)$ converge vers $-f(1)$.

Par définition de la convergence des séries $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(\Delta f)(p)$ converge et

$$\sum_{p=1}^{+\infty}(\Delta f)(p) = -f(1).$$

De même, on a la convergence et la somme de la série

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}(\Delta f)(p) = -f(n+1).$$

---

c) Exprimer Δf_{k-1} en fonction de k et de f_k pour $k \geq 1$.

$\forall x \in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}\Delta f_{k-1}(x) &= f_{k-1}(x+1) - f_{k-1}(x)\\ &= \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+1+(k-1))} - \frac{1}{x(x+1)\dots(x+(k-1))}\\ &= \frac{x-(x+k)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+k)}\\ &= -k\frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+k)}\\ &= -kf_k(x),\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\Delta f_{k-1} = -kf_k.}$$

---

d) Établir pour tout nombre entier naturel $k \geq 1$ la convergence de la série $\Sigma f_k(p)$ et vérifier, pour tout nombre entier naturel n, que :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k}\frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+k)}.$$

Le terme général de la série (indexée par p) $\Sigma f_k(p)$ peut s'écrire $-\frac{1}{k}\Delta f_{k-1}(p)$.
Pour tout $k \geq 1$, puisque $\lim_{x\to+\infty} f_{k-1}(x) = 0$ et que f_{k-1} est continue, $f_{k-1} \in E$ et la série $\Sigma\Delta f_{k-1}(p)$ converge d'après b).
En utilisant encore les résultats de b),

$$\begin{aligned}
\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) &= -\frac{1}{k}\sum_{p=n+1}^{+\infty} \Delta f_{k-1}(p) \\
&= -\frac{1}{k}(-f_{k-1}(n+1)) \\
&= \frac{1}{k}\frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+1+(k-1)} \\
&= \frac{1}{k}\frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+k)}.
\end{aligned}$$

2°) <u>Accélération de la convergence de (S_n)</u>

a) Établir la relation suivante pour $p \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}(k-1)!f_k(p) = \frac{q!}{p}f_q(p).$$

Montrons cette propriété par récurrence sur q.

- Pour $q = 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{1}(k-1)!f_k(p) &= \frac{1}{p^2} - 0!f_1(p) \\
&= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p(p+1)} \\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \\
&= \frac{1}{p}\frac{1}{p(p+1)} \\
&= \frac{1!}{p}f_1(p).
\end{aligned}$$

- Supposons que, pour un $q \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}(k-1)!f_k(p) = \frac{q!}{p}f_q(p).$$

• Alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{q+1}(k-1)!f_k(p) &= \left(\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{q}(k-1)!f_k(p)\right)-((q+1)-1)!f_{q+1}(p)\\
&= \frac{q!}{p}f_q(p)-q!f_{q+1}(p)\\
&= \frac{q!}{p}\left(f_q(p)-p\frac{1}{p(p+1)\dots(p+q+1)}\right)\\
&= \frac{q!}{p}\left(f_q(p)-\frac{1}{(p+1)\dots(p+q+1)}\right)\\
&= \frac{q!}{p}\left(f_q(p)-f_q(p+1)\right)\\
&= \frac{q!}{p}(-\Delta f_q(p))\\
&= \frac{q!}{p}(q+1)f_{q+1}(p)\\
&= \frac{(q+1)!}{p}f_{q+1}(p),
\end{aligned}$$

en utilisant $\Delta f_q(p)=(q+1)f_{q+1}(p)$ vu en 1)c).

• On a donc

$$\forall q\in\mathbb{N}^*,\qquad \frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{q}(k-1)!f_k(p)=\frac{q!}{p}f_q(p).$$

---

b) En déduire l'inégalité suivante pour $n\geq 1$ et $q\geq 1$:

$$0\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{q}\frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+k)}\leq\frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}.$$

Tout d'abord, la série (indexée par p) de terme général positif

$$\frac{q!}{p}f_q(p)=q!\frac{1}{p.p(p+1)\dots(p+q)}\sim\frac{1}{p^{q+2}}$$

est convergente puisque la série de Riemann $\sum\frac{1}{p^{q+2}}$ converge ($q+2>1$).

En sommant de $p=n+1$ à $+\infty$ l'égalité trouvée à la question précédente :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{q}(k-1)!f_k(p)\right)=\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{q!}{p}f_q(p),$$

en remarquant que $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}$ converge :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}-\sum_{p=n+1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{q}(k-1)!f_k(p)=\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{q!}{p}f_q(p),$$

enfin en utilisant le fait que les séries $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty}f_k(p)$ convergent, puis en majorant le second membre, et en remarquant enfin que le premier est positif, on obtient l'encadrement

$$0 \le \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} \sum_{p=n+1}^{+\infty} (k-1)! f_k(p) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{q!}{p} f_q(p)$$
$$\le \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{q!}{n+1} f_q(p)$$
$$0 \le \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} \left((k-1)! \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) \right) \le \frac{q!}{n+1} \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_q(p)$$
$$0 \le \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} (k-1)! \frac{1}{k(n+1)\dots(n+q)} \le \frac{q!}{n+1} \frac{1}{q(n+1)\dots(n+q)}$$
$$0 \le \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} (k-1)! \frac{1}{k(n+1)\dots(n+q)} \le \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}$$

en utilisant deux fois 1)d).

---

c) En déduire, l'entier $q \ge 1$ étant fixé, une suite (S'_n) de nombres rationnels telle que :

$$0 \le \frac{\pi^2}{6} - S'_n \le \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}.$$

Expliciter S'_n et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

$$0 \le \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+q)} \right) \le \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q),}$$
$$0 \le \frac{\pi^2}{6} - \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+q)} \right) \le \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)},$$

donc

$$S'_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+q)}$$

convient.
Pour $q = 2$,

$$S'n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \sum_{k=1}^{2} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+q)}$$
$$= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

et l'inégalité précédente devient

$$0 \le \frac{\pi^2}{6} - \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \right) \le \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}.$$

---

d) Écrire en PASCAL un algorithme calculant et affichant S'_n pour $q = 2$ lorsque n est donné.

Voici une fonction qui rend S'_n tout en l'affichant (il n'est pas gênant de rendre en plus S'_n, la syntaxe

```
...instructions ; S_prime(n) ; instructions...
```

étant licite.
L'ordre des affectations des divers termes à `s` *est choisi pour une meilleure précision*

```
function S_prime(n :integer) :real ;
 var s :real ;
     p :integer ;
begin
s :=1/(2*(n+1)*(n+2) ;
for p=n downto 1 do s :=s+1/p/p ;
s :=s+1/(n+1) ;
S_prime :=s ;
writeln('S_n= ',s)
end ;
```