Michel Carré, lycée Joffre, Montpellier

CCP 2001, filière MP, seconde épreuve

• Partie I

1. Par développement suivant la première ligne, $\det C_P = (-1)^n a_0 = (-1)^n P(0)$, d'où le résultat.

2. $\chi_{C_P} = \begin{vmatrix} -X & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & 1 & -X & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -X-a_{n-1} \end{vmatrix}$. Par développement suivant la dernière colonne, il vient :

$$\chi_{C_P} = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k+1}(-a_k)(-X)^k\, 1^{n-1-k} - (X+a_{n-1})(-X)^{n-1} = (-1)^n \left(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right) = (-1)^n P.$$

3. Il est évidemment nécessaire que le coefficient de X^n dans Q soit égal à $(-1)^n$. C'est aussi suffisant puisque dans ce cas la matrice $A = C_{(-1)^n Q}$ convient d'après le 2.

4. a. Une matrice carrée A et sa transposée ont le même polynôme caractéristique puisque ${}^tA - XI_n = {}^t(A - XI_n)$; elles ont *a fortiori* le même spectre.

   b. ${}^tC_P X = \lambda X$ impose $x_2 = \lambda x_1,\ \dots,\ x_n = \lambda x_{n-1}$ donc $E_\lambda({}^tC_P)$ est inclus dans $\operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ et il y a forcément égalité puisqu'un sous-espace propre n'est pas réduit à $\{0\}$.

   c. $\chi_{{}^tC_P} = \chi_{C_P} = (-1)^n P$ donc ${}^tC_P$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur K et si en outre l'ordre de multiplicité de chaque racine est égal à la dimension du sous-espace propre associé, c'est-à-dire à 1 d'après b.

   d. D'après c., ${}^tC_P$ est diagonalisable. D'après b., les colonnes du déterminant de Vandermonde sont des vecteurs propres de ${}^tC_P$ associés respectivement aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; elles forment donc par théorème une famille libre et la non-nullité du déterminant en résulte.

5. a. Soient $P = X^{2002} - X^{2001} - X^{2000} - 1999$ et $A = C_P \in \mathscr{M}_{2002}(\mathbb{R})$.
   $\chi_A = P$ donc $P(A) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

   b. Soit $a \in E \backslash \operatorname{Ker}(f^{n-1})$. On montre facilement que la famille $\left(f^k(a)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est libre, donc est une base de E. La matrice de f dans cette base est par construction C_{X^n}.

• Partie II

6. $AX = \lambda X$ donc $|\lambda x_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_{i,j}||x_j| \leqslant \|X\|_\infty \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = r_i \|X\|_\infty$.

7. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$. Avec les notations du 6., on peut choisir $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_i| = \|X\|_\infty > 0$.
   On obtient alors $|\lambda| \leqslant r_i$, donc $\lambda \in D_i$.

8. On sait que les racines de P sont les valeurs propres de C_P. Il suffit donc d'appliquer le résultat du 7. à C_p, avec ici $r_1 = |a_0|$, $r_2 = 1 + |a_1|$, $\dots$, $r_n = 1 + |a_{n-1}|$.

9. Pour le polynôme $P = X^a + X^b - X^c - X^d$, $|a_0|$ et les $1 + |a_k|$ valent $0, 1$ ou 2, donc les racines de P sont de module inférieur ou égal à 2, mais 2 n'est pas racine de P car en supposant par exemple que d est inférieur à a, b et c, on voit que $P(2)$ s'écrit $2^d(2m-1)$ avec $m \in \mathbb{Z}$, donc $P(2) \neq 0$. P n'a donc pas de racine dans $\mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$.
   Remarque : l'hypothèse de non-nullité de a, b, c, d est inutile.

- **Partie III**

Remarque : dans toute cette partie, l'hypothèse $a_0 \neq 0$ est inutile.

10. Il suffit de multiplier par λ^n l'égalité $P(\lambda) = 0$.
Remarque : il y a même équivalence entre les deux propriétés (prendre $n = 0$ dans la relation de récurrence).

11. La linéarité de φ est évidente. D'autre part, par définition même de F, il existe une et une seule suite appartenant à F ayant des termes de rang 0 à $p-1$ imposés ; cela signifie que φ est bijective. On en déduit que $\dim F = p$.

12. a. $e_i(p) = -a_i$ d'après la relation de récurrence.
b. Cette famille est l'image de la base canonique de $\mathbb{C}^p$ par l'isomorphisme φ^{-1} du 11.
c. Ces deux suites appartiennent à F et prennent les mêmes valeurs aux rangs 0 à $p-1$, donc sont égales.

13. La linéarité de f est évidente. Si $u \in F$, on voit que la relation de récurrence au rang $n+1$ pour u est exactement la relation de récurrence au rang n pour $f(u)$, donc $f(u) \in F$ et F est stable par f.
Remarque : on peut aussi observer que $F = \operatorname{Ker} P(f)$, d'où la stabilité demandée puisque f et $P(f)$ commutent.

14. D'après 12.c. et 12.a., $g(e_j) = \sum\limits_{i=0}^{p-1} g(e_j)(i)\, e_i = \sum\limits_{i=0}^{p-1} e_j(i+1)\, e_i = \sum\limits_{i=0}^{p-2} \delta_{i+1,j}\, e_i - a_j\, e_{p-1}$.
Ainsi, $g(e_0) = -a_0\, e_{p-1}$ et pour $j \in [\![1, p-1]\!]$, $g(e_j) = e_{j-1} - a_j\, e_{p-1}$, d'où la matrice demandée.

15. a. On sait par 10. que pour chaque $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite géométrique $n \longmapsto \lambda_k^n$ appartient à F ; de plus cette suite est évidemment un vecteur propre de g associé à λ_k.
Comme F est de dimension p, ces p suites constituent une base de F, formée de vecteurs propres de g.
Remarque : l'hypothèse de non-nullité des λ_k est inutile.
b. Il s'agit simplement de la décomposition de u dans la base propre précédente.

16. Ici, $P = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc = (X-a)(X-b)(X-c)$.
D'après 15.a. les suites $(a^n), (b^n)$ et (c^n) forment une base de F.

- **Partie IV**

17. Il est clair que le rang d'une matrice compagnon de taille n est supérieur ou égal à $n-1$, donc si A est une matrice de taille n et de rang inférieur ou égal à $n-2$ (par exemple la matrice nulle), A n'est pas semblable à C_A.

18. $U - V = P^{-1}(C_U - C_V)P$ donc $\operatorname{rg}(U-V) = \operatorname{rg}(C_U - C_V) = 1$; en effet, les $n-1$ premières colonnes de $C_U - C_V$ sont nulles et $C_U - C_V \neq 0$ puisque $U \neq V$.
Remarque : l'hypothèse d'inversibilité de U et V est inutile ici.

19. Prenons $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. U et V sont inversibles et $\operatorname{rg}(U-V) = 1$.
Mais $\chi_U = \chi_V = (X-1)^2$, donc $C_U = C_V$, donc $(**)$ n'est évidemment pas vérifiée. $\chi_U \wedge \chi_V = (X-1)^2$.

20. $\operatorname{rg}(u-v) = \operatorname{rg}(U-V) = 1$, donc H est un hyperplan d'après le théorème du rang.

21. a. Par l'absurde, supposons $F \subset H$; alors $u_F = v_F$, donc $\chi_{u_F} = \chi_{v_F}$ et ce polynôme de degré $\dim F \geqslant 1$ diviserait $\chi_u = \chi_U$ et $\chi_v = \chi_V$; c'est impossible puisque $\chi_U \wedge \chi_V = 1$.
b. D'après a., $F + H$ contient strictement H ; comme H est un hyperplan, cela implique que $F + H = E$.
Soit alors G un supplémentaire de $F \cap H$ dans H. On a $F \oplus G = F + H = E$ et on peut donc construire une base B' de E en concaténant une base B_F de F et une base B_G de G ; comme $G \subset H$, B_G est bien formée de vecteurs de H.
u et v laissent F stable et coïncident sur H donc leurs matrices dans B' sont de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$
où A et B sont des matrices carrées de taille $\dim F$ et D une matrice carrée de taille $n - \dim F \geqslant 1$.
Mais alors $\chi_u = \chi_U = \chi_A \chi_D$ et $\chi_v = \chi_V = \chi_B \chi_D$, avec $\deg \chi_D \geqslant 1$, ce qui contredit l'hypothèse $\chi_U \wedge \chi_V = 1$.
c. D'après b., les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u et v sont $\{0\}$ et E.

22. a. u est bijectif donc G_j est l'image de H par l'automorphisme u^{-j}, lequel conserve la dimension ; par conséquent, G_j est un hyperplan.

b) Soit φ_j une forme linéaire de E de noyau G_j. D'après le cours, $\dim\left(\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j\right) = n - r$, où r est le rang de la famille $(\varphi_j)_{0\leqslant j\leqslant n-2}$. r est inférieur ou égal au cardinal $n-1$ de cette famille, donc $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \neq \{0\}$.

c. Définissons p comme le suggère l'énoncé et raisonnons par l'absurde, en supposant $p \leqslant n-1$.
Par définition de y, pour $k \in [\![0,\, n-2]\!]$, $u^k(y) \in H$, donc F est inclus dans H, donc u et v coïncident sur F. D'autre part, d'après la définition de p, $u^p(y)$ appartient à F, donc F est stable par u, et de ce fait aussi par v ; cela contredit 21.c. puisque F n'est ni réduit à $\{0\}$ $(y \neq 0)$ ni égal à E $(\dim F = p \leqslant n-1)$.

On en déduit que $p = n$, et B'' est par conséquent une base de E (famille libre de cardinal n).

d. La forme même de la base B'' montre que la matrice U'' de u dans B'' est une matrice compagnon notée C_Q.
Cela implique que $\chi_u = \chi_{C_Q} = (-1)^n Q$, donc $Q = (-1)^n \chi_u = (-1)^n \chi_U$ et finalement $U'' = C_U$.
Le même raisonnement montre que la matrice de v dans B'' est C_V puisque u et v coïncident sur les $n-1$ premiers vecteurs cette base.

e. Soit P la matrice de passage de la base B'' à la base B. Le d. et la formule de changement de base montrent que $U = P^{-1} C_U P$ et $V = P^{-1} C_V P$. U et V vérifient donc la propriété $(**)$.

Remarque : on a utilisé l'inversibilité de U mais pas celle de V ; d'autre part, l'hypothèse $\chi_U \wedge \chi_V = 1$ implique évidemment que l'une au moins des matrices U et V est inversible. Finalement, si deux matrices U et V de $\mathscr{M}_n(K)$ telles que $\chi_U \wedge \chi_V = 1$ vérifient $(*)$, alors elles vérifient $(**)$.

23. χ_u et χ_v sont premiers entre eux donc, d'après les questions précédentes, il existe une base $\mathscr{B} = (e_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de E dans laquelle u et v admettent respectivement pour matrice C_{X^n+1} et C_{X^n-1} ; autrement dit :

$$\forall j \in [\![1,\, n-1]\!],\ u(e_j) = v(e_j) = e_{j+1},\ u(e_n) = -e_1,\ v(e_n) = e_1.$$

On en déduit que l'ensemble $S = \{\pm e_j\ ;\ j \in [\![1, n]\!]\}$ est stable, et par injectivité globalement invariant, par u et v. S est donc encore invariant par tous les éléments du sous-groupe G de $\mathrm{GL}(E)$ engendré par u et v.

Ainsi, chaque $w \in G$ induit une permutation σ_w de S et l'application $w \longmapsto \sigma_w$ de G dans $\Sigma(S)$ est injective car comme S contient une base de E, deux endomorphismes de E qui coïncident sur S sont égaux.
On en déduit que G est fini et que $|G| \leqslant |\Sigma(S)| = (2n)!$
