

Autour du commutant d'un endomorphisme

Partie 0. Un exemple.

1. M a pour terme général $m_{i,j} = i \delta_{i,j}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de terme général $a_{i,j}$.

$$\begin{aligned} \underline{A \in \mathcal{C}(M)} &\iff AM = MA \iff \forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \sum_{j=1}^n a_{i,j} m_{j,k} = \sum_{j=1}^n m_{i,j} a_{j,k} \\ &\iff \forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \sum_{j=1}^n j a_{i,j} \delta_{j,k} = \sum_{j=1}^n i \delta_{i,j} a_{j,k} \iff \forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, k a_{i,k} = i a_{i,k} \\ &\iff \forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, (i \neq k \implies a_{i,k} = 0) \iff \underline{A \text{ est diagonale.}} \end{aligned}$$

2. En notant $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a :

$$A \in \mathcal{C}(M) \iff \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{C}^n / A = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{i,i}.$$

Une base de $\mathcal{C}(M)$ est donc : $(E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,n})$, donc $\dim \mathcal{C}(M) = n$.

Partie I. Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

1. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$ et $x \in E_{\lambda_i}(u)$. Ainsi $u(x) = \lambda_i \cdot x$.

D'une part, $v(u(x)) = v(\lambda_i \cdot x) = \lambda_i \cdot v(x)$, d'autre part, $v(u(x)) = u(v(x))$.

Donc $u(v(x)) = \lambda_i \cdot v(x)$, ce qui montre que $v(x) \in E_{\lambda_i}(u)$.

Donc tous les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont stables par v .

2. On sait d'autre part que chaque $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par u , ce qui autorise à considérer l'endomorphisme u_i induit par u sur $E_{\lambda_i}(u)$. u_i n'est autre que l'homothétie de rapport λ_i de $E_{\lambda_i}(u)$.

3. Soit \mathcal{B} une base adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$.

• Si $v \in \mathcal{C}(u)$, comme chaque $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v , on sait que $B = \text{Mat}(v, \mathcal{B})$ est diagonale par blocs de la forme

$$B = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & V_p \end{pmatrix} \text{ avec } V_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbf{C}).$$

• Réciproquement, supposons que $B = \text{Mat}(v, \mathcal{B})$ soit de la forme $B = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & V_p \end{pmatrix}$ avec $V_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbf{C})$.

\mathcal{B} étant en particulier une base de vecteurs propres de u , alors $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$ est diagonale et on peut la décomposer

en blocs sous la forme $A = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_p \end{pmatrix}$ avec $D_i = \lambda_i \cdot I_{n_i}$ (puisque u_i est une homothétie).

Comme $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, D_i V_i = (\lambda_i \cdot I_{n_i}) V_i = V_i (\lambda_i \cdot I_{n_i}) = V_i D_i$, alors $AB = BA$, donc $u \circ v = v \circ u$, d'où $v \in \mathcal{C}(u)$.

4. Par l'isomorphisme $v \mapsto \text{Mat}(v, \mathcal{B})$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on obtient que $\mathcal{C}(v)$ a la même dimension que le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ constitué des matrices ayant la forme de B .

Ces matrices dépendent de $\sum_{i=1}^p (n_i)^2$ coefficients arbitraires, donc peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de

$$\sum_{i=1}^p (n_i)^2 \text{ matrices } E_{j,k} \text{ de la base canonique de } \mathcal{M}_n(\mathbf{C}). \text{ Donc } \boxed{\dim \mathcal{C}(u) = \sum_{i=1}^p (n_i)^2.}$$

5. Comme $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, (n_i)^2 \geq n_i$, alors $\dim \mathcal{C}(u) \geq \sum_{i=1}^p n_i = \dim E = n$ (en effet u étant diagonalisable, n est égal à la somme des dimensions des sous-espaces propres de u).
6. Soit \mathcal{B} une base quelconque de E . L'endomorphisme u de E représenté dans la base \mathcal{B} par la matrice M de la partie 0 est tel que $\dim \mathcal{C}(u) = \dim \mathcal{C}(M) = n$.

Partie II. Commutant d'un endomorphisme nilpotent d'indice 2.

1. Supposons que $u \circ u = 0$. Soit $y \in \text{Im } u$. Alors $\exists x \in E / y = u(x)$. Donc $u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = 0$, d'où $y \in \text{Ker } u$.

Ainsi $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$. De plus, $\text{rg } u = \dim(\text{Im } u) \leq \dim(\text{Ker } u) = n - \text{rg } u$, donc $2 \text{rg } u \leq n$, d'où $r \leq \frac{n}{2}$.

2. On remarque d'abord que puisque G est un supplémentaire de $\text{Ker } u$, alors $\dim G = n - \dim(\text{Ker } u) = \text{rg } u = r$, donc il est légitime de noter (e'_1, \dots, e'_r) une base de G .
On sait que u induit un isomorphisme \tilde{u} de G sur $\text{Im } u$. Ainsi l'image de la base (e'_1, \dots, e'_r) de G est une base de $\text{Im } u$.

Redémontrons le théorème d'isomorphisme utilisé ci-dessus. Considérons $\tilde{u} : \begin{matrix} x \\ G \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} u(x) \\ \text{Im } u \end{matrix}$ qui est linéaire.

. $\text{Ker } \tilde{u} = \text{Ker } u \cap G = \{0\}$, donc \tilde{u} est injective.

. $\text{Im } u = u(E) = u(G + \text{Ker } u) = u(G) + u(\text{Ker } u) = u(G) = \tilde{u}(G)$, donc \tilde{u} est surjective, donc bijective.

3. $E = \text{Ker } u \oplus G = \text{Im } u \oplus H \oplus G$. On a donc $\dim(\text{Im } u) = \dim G = r$ et $\dim H = n - 2r = s$.
Soit $(e'_{r+1}, \dots, e'_{r+s})$ une base de H . Considérons la famille $\mathcal{B}' = (u(e'_1), \dots, u(e'_r), e'_{r+1}, \dots, e'_{r+s}, e'_1, \dots, e'_r)$.
Il s'agit d'une base de E adaptée à la somme directe $E = \text{Im } u \oplus H \oplus G$.

$$\text{Alors } u(\mathcal{B}') = (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, u(e'_1), \dots, u(e'_r)), \text{ donc } \text{Mat}(u, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow r \\ \downarrow s \\ \downarrow r \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \leftarrow r & \leftarrow s & \leftarrow r \end{matrix}$$

$$4. v \in \mathcal{C}(u) \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v \in \mathcal{C}(u) \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & A_4 \\ 0 & 0 & A_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_7 & A_8 & A_9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A_4 = 0_{s,r} \\ A_7 = 0_{r,r} \\ A_8 = 0_{r,s} \\ A_9 = A_1 \end{cases}.$$

Ainsi $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si $\text{Mat}(v, \mathcal{B}')$ de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & A_5 & A_6 \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}$.

5. Le nombre de coefficient arbitraires de cette matrice est égal à $rn + s(s+r) = nr + (n-2r)(n-r) = n^2 + 2r^2 - 2rn$.
Ainsi $\underline{\dim \mathcal{C}(u) = (n-r)^2 + r^2}$.

En posant $f_n(x) = 2x^2 - 2nx + n^2$, alors $f'_n(x) = 2(2x - n)$, donc f_n admet un minimum pour $x = \frac{n}{2}$ égal à $\frac{n^2}{2}$.

Ainsi $\underline{\dim \mathcal{C}(u) \geq \frac{n^2}{2}}$.

Partie III. Commutant d'un endomorphisme vérifiant la relation (1).

1. Les polynômes $P_1 = X - 1$ et $P_2 = (X - 2)^2$ sont premiers entre eux.

De plus $(P_1 P_2)(u) = P_1(u) \circ P_2(u) = (u - \text{Id}) \circ (u - 2\text{Id})^2 = 0$.

Le théorème de décomposition des noyaux donne : $\text{Ker}((P_1 P_2)(u)) = \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \text{Ker}(P_2(u))$, c'est à dire : $E = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2 = E_1 \oplus E_2$.

Remarquons tout de suite que E_1 et E_2 étant des noyaux de polynômes en u sont stables par u .

2. La décomposition en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$ de $F(X)$ est de la forme : $F(x) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-2)^2} + \frac{c}{X-2}$.

. On multiplie par $X - 1$, puis on remplace X par 1, ce qui donne : $\frac{1}{(1-2)^2} = a + b \times 0 + c \times 0$, donc $\underline{a = 1}$.

. On multiplie par $(X - 2)^2$, puis on remplace X par 2, ce qui donne : $\frac{1}{2-1} = a \times 0 + b + c \times 0$, donc $\underline{b = 1}$.

. Pour $X := 0$, on trouve que $\underline{c = -1}$.

Donc $F(X) = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-2)^2} - \frac{1}{X-2} = \frac{1}{X-1} + \frac{3-X}{(X-2)^2}$.

Ainsi $1 = \underline{(X-1)(X-2)^2 F(X) = (X-2)^2 + (X-1)(3-X)}$, donc $\boxed{V(X) = 1 \text{ et } U(X) = 3 - X}$.

3. On en déduit que : $\text{Id} = U(u) \circ (u - \text{Id}) + V(u) \circ (u - 2\text{Id})^2$.

Donc $\forall x \in E$, $x = [U(u) \circ (u - \text{Id})](x) + [V(u) \circ (u - 2\text{Id})^2](x)$.

Posons $x_1 = [V(u) \circ (u - 2\text{Id})^2](x)$ et $x_2 = [U(u) \circ (u - \text{Id})](x)$. Ainsi $\underline{x = x_1 + x_2}$.

Vérifions par exemple que $x_1 \in E_1 = \text{Ker}(P_1(u)) = \text{Ker}(u - \text{Id})$. On rappelle que des polynômes en u commutent.

On a : $(u - \text{Id})(x_1) = [(u - \text{Id}) \circ V(u) \circ (u - 2\text{Id})^2](x) = V(u) \left(((u - \text{Id}) \circ (u - 2\text{Id})^2)(x) \right) = V(u)(0) = 0$.

On montre de même que $x_2 \in E_2$.

On a donc décomposé x en $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. On en déduit que $x_1 = p_1(x)$ et $x_2 = p_2(x)$.

Ainsi $\forall x \in E$, $p_1(x) = [V(u) \circ (u - 2\text{Id})^2](x)$, donc $\underline{p_1 = V(u) \circ (u - 2\text{Id})^2 = (u - 2\text{Id})^2 = u^2 - 4u + 4\text{Id}}$.

De même $\underline{p_2 = U(u) \circ (u - \text{Id}) = (3\text{Id} - u) \circ (u - \text{Id}) = -u^2 + 4u - 3\text{Id}}$.

L'intérêt de ces égalités est que p_1 et p_2 s'expriment comme des polynômes en u .

4. Montrons que $d = p_1 + 2p_2$ est diagonalisable.

Solution matricielle Dans une base \mathcal{B} adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$; $\text{Mat}(d, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 2I_{n_2} \end{pmatrix}$ ce qui montre que $d = p_1 + 2p_2$ est diagonalisable.

Autre solution p_1 et p_2 sont des projecteurs associés, donc $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$.

On a : $\text{Id} = p_1 + p_2$, $d = p_1 + 2p_2$ et $d^2 = p_1^2 + 2p_1 \circ p_2 + 2p_2 \circ p_1 + 4p_2^2 = p_1 + 4p_2$.

On tire $p_1 = 2d - d^2$ et $p_2 = \frac{d^2 - d}{2}$, donc $\text{Id} = p_1 + p_2 = -\frac{d^2}{2} + \frac{3d}{2}$, d'où $d^2 - 3d + 2\text{Id} = 0$.

Ainsi d annule le polynôme $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$ scindé à racines simples, donc d est diagonalisable.

5. $w = u - d$ avec $d = p_1 + 2p_2 = (u^2 - 4u + 4\text{Id}) + 2(-u^2 + 4u - 3\text{Id}) = -u^2 + 4u - 2\text{Id}$.

Donc $w = u^2 - 3u + 2\text{Id} = \underline{(u - \text{Id}) \circ (u - 2\text{Id})}$.

On en déduit que $w^2 = (u - \text{Id}) \circ (u - \text{Id}) \circ (u - 2\text{Id})^2 = (u - \text{Id}) \circ 0 = 0$.

Ainsi, ou bien $w = 0$, ou bien $w \neq 0$ et $w^2 = 0$, c'est à dire w est nilpotent d'indice 2.

6. Détermination de $\mathcal{C}(u)$.

- (a) * Si $v \in \mathcal{C}(u)$, alors v commute avec tout polynôme en u , donc en particulier avec $d = -u^2 + 4u - 2\text{Id}$ et $w = u^2 - 3u + 2\text{Id}$.
 * Si v commute avec d et avec w , alors v commute avec $u = d + w$.

Ainsi : $v \in \mathcal{C}(u) \iff v \in \mathcal{C}(d) \text{ et } v \in \mathcal{C}(w)$.

- (b) w est un polynôme en u , donc $E_1 = \text{Ker}(u - \text{Id})$ et $E_2 = \text{Ker}(u - 2\text{Id})$ sont stables par w .

De plus $w = (u - 2\text{Id}) \circ (u - \text{Id})$, d'où $E_1 = \text{Ker}(u - \text{Id}) \subset \text{Ker } w$, donc la restriction de w à E_1 est nulle.

En outre, $\forall x \in E_2 = \text{Ker}(u^2 - 4u + 4\text{Id})$, $w(x) = (u^2 - 3u + 2\text{Id})(x) = (u^2 - 4u + 4\text{Id})(x) + (u - 2\text{Id})(x) = (u - 2\text{Id})(x)$, donc w et $u - 2\text{Id}$ coïncident sur E_2 .

En se plaçant sur une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$, alors w admet dans cette base une

représentation matricielle diagonale par blocs de la forme $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ où l'on sait que N est la matrice dans la base \mathcal{B}_2 de l'endomorphisme w_2 induit sur E_2 par w , donc aussi par $u - 2\text{Id}$.

Puisque $u = d + w$, il en résulte que $\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} + N \end{pmatrix}$.

Remarque : puisque $w^2 = 0$, on a $N^2 = 0$.

- (c) On a $\text{Ker } w_2 = E_2 \cap \text{Ker}(u - 2\text{Id}) = \text{Ker}(u - 2\text{Id})$ car $\text{Ker}(u - 2\text{Id}) \subset \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2 = E_2$.

Donc $\text{rg } N = \text{rg } w_2 = \dim E_2 - \dim(\text{Ker } w_2) = n_2 - \dim(\text{Ker}(u - 2\text{Id}))$.

- (d) * Si v commute avec u , alors v stabilise $E_1 = \text{Ker}(u - \text{Id})$ et $E_2 = \text{Ker}(u - 2\text{Id})$, alors $\text{Mat}(v, \mathcal{B})$ est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$. En traduisant que $\text{Mat}(u, \mathcal{B})$ et $\text{Mat}(v, \mathcal{B})$ commutent, on trouve que $V_2 N = N V_2$.

* Réciproquement si $\text{Mat}(u, \mathcal{B})$ est de la forme $\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$ avec $V_2 N = N V_2$, on constate immédiatement que $\text{Mat}(u, \mathcal{B})$ et $\text{Mat}(v, \mathcal{B})$ commutent, donc u et v commutent, d'où $v \in \mathcal{C}(u)$.

- (e) * Si u est diagonalisable, alors $u - 2\text{Id}$ l'est aussi et on sait l'endomorphisme w_2 induit sur E_2 par $u - 2\text{Id}$ est diagonalisable. Donc $N = \text{Mat}(w_2, \mathcal{B}_2)$ est diagonalisable. Or N est nilpotente, donc ses valeurs propres sont toutes nulles (car si $NX = \lambda X$ et $X \neq 0$, alors $0 = N^2 X = \lambda^2 X$, donc $\lambda = 0$).

Ainsi N est semblable à la matrice diagonale nulle, donc $N = 0$.

* Si $N = 0$, alors $w = 0$, donc $u = d$ est diagonalisable.

- (f) On suppose u non diagonalisable, donc $N \neq 0$, donc N est nilpotente d'indice égal à 2.

Posons $p = \dim(\text{Ker}(u - 2\text{Id}))$. Ainsi le rang de N est $r_2 = n_2 - p$.

Puisque N est nilpotente d'indice 2, d'après le II.5, le commutant de N a pour dimension $(n_2 - r_2)^2 + r_2^2 = p^2 + (n_2 - p)^2$.

De la caractérisation obtenue au (d), on déduit que $\dim \mathcal{C}(u) = n_1^2 + p^2 + (n_2 - p)^2$.

Fin du corrigé