Concours Centrale-Supelec 2003
Filière PC
Epreuve : MATHEMATIQUES I

Corrigé par Sylvie Bonnet, math PC*-Besançon

Préliminaires

1) g étant intégrable sur $[a,b[$, l'est également sur tout intervalle $[x,b[$, pour tout $x \in [a,b[$.

1.a) f et g étant strictement positives, $f = o(g)$ est équivalent à
$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta \in [a,b[$ tel que $\forall t \in [a,b[,\ \beta \le t < b \Rightarrow 0 < f(t) \le \varepsilon g(t)$.
Soit $x \in [a,b[$. g étant intégrable sur $[x,b[$, f l'est également par **théorème de comparaison des intégrales.**
D'autre part, par **croissance de l'intégrale**, $\forall x \in [a,b[,\ \beta \le x < b \ \Rightarrow 0 \le \int_x^b f \le \varepsilon \int_x^b g$.

$$\boxed{\int_x^b f = o\left(\int_x^b g\right)}$$

1.b) g étant strictement positive, $f \approx g$ quand x tend vers b est équivalent à
$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta \in [a,b[$ tel que $\forall t \in [a,b[,\ \beta \le t < b \Rightarrow 0 < |f(t) - g(t)| \le \varepsilon g(t)$.
Soit $x \in [a,b[$. g étant intégrable sur $[x,b[$, $f - g$ l'est également par **théorème de comparaison des intégrales** et f est intégrable sur $[x,b[$, car $f=(f-g)+g$, somme de deux fonctions intégrables sur $[x,b[$.
D'autre part, par **linéarité et croissance de l'intégrale**,
$\forall x \in [a,b[,\ \beta \le x < b \ \Rightarrow 0 \le \left|\int_x^b f - \int_x^b g\right| = \left|\int_x^b (f-g)\right| \le \varepsilon \int_x^b g$.

$$\boxed{\int_x^b f \approx \int_x^b g \text{ quand } x \text{ tend vers } b}$$

2) f et g étant continues par morceaux sur $[a,b[$ sont intégrables sur tout segment $[a,x]$ avec $x \in [a,b[$. Mais g étant strictement positive et non intégrable sur $[a,b[$, $\int_a^x g \underset{x \to b}{\to} +\infty$. En particulier, $\int_a^x g$ est strictement positive au voisinage de b.

2.a) On reprend la définition du 1a)
$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta \in [a,b[$ tel que $\forall t \in [a,b[,\ \beta \le t < b \Rightarrow 0 < f(t) \le \varepsilon g(t)$.
Soit $x \in [\beta,b[$. Par **additivité de l'intégrale,** $\int_a^x f = \int_a^\beta f + \int_\beta^x f$ et , par **croissance de l'intégrale :**

$$0 \le \frac{\int_a^x f}{\int_a^x g} = \frac{\int_a^\beta f}{\int_a^x g} + \frac{\int_\beta^x f}{\int_a^x g} \le \frac{\int_a^\beta f}{\int_a^x g} + \frac{\varepsilon \int_\beta^x g}{\int_a^x g} \le \frac{\int_a^\beta f}{\int_a^x g} + \varepsilon$$

Comme $\int_a^x g$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers b, pour β fixé, $\dfrac{\int_a^\beta f}{\int_a^x g}$ tend vers 0 quand x tend vers b et peut donc être rendu inférieur à ε pour x assez proche de b.
Finalement :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in [a,b[\text{ tel que } \forall t \in [a,b[,\ \alpha \le t < b \Rightarrow 0 < \frac{\int_a^x f}{\int_a^x g} \le 2\varepsilon .$$

$$\boxed{\int_a^x f = o\left(\int_a^x g\right)}$$

<u>exemples</u>

i) $[a,b[= [1,+\infty[$, $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$, $g(t) = \dfrac{1}{t}$. f est négligeable devant g quand x tend vers $+\infty$.
f est intégrable sur $[1,+\infty[$ et g ne l'est pas. (**fonctions de Riemann**)

ii) $[a,b[= [1,+\infty[$, $f(t) = \dfrac{1}{t}$, $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. f est négligeable devant g quand x tend vers $+\infty$.
f et g ne sont pas intégrables sur $[1,+\infty[$. (**fonctions de Riemann**)

2.b) f et g étant équivalentes quand x tend vers b, et g étant non intégrable sur $[a,b[$, f n'est pas intégrable sur $[a,b[$ par **théorème de comparaison des intégrales**.

$f \approx g$ quand x tend vers b est équivalent à $f - g = o(g)$. D'après le **2a)**, $\int_a^x (f-g) = o\left(\int_a^x g\right)$ et $\boxed{\int_a^x f \approx \int_a^x g \text{ quand } x \text{ tend vers } b}$.

Remarque : on a des résultats analogues pour des fonctions définies sur $]a,b]$.

Partie I

I.A

I.A.1)

Il s'agit d'appliquer le résultat de la question **2b)** des préliminaires sur l'intervalle $]0,1]$ aux fonctions f et g définies par $f(t) = \dfrac{e^t}{Arc\sin(t)}$ et $g(t) = \dfrac{1}{t}$. Ces fonctions sont continues sur $]0,1]$ et g n'est pas intégrable sur $]0,1]$. Donc

$$\boxed{\int_x^1 \frac{e^t}{Arc\sin(t)} dt \approx \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln(x) \text{ quand } x \text{ tend vers } 0^+}$$

I.A.2)

$\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{Arc\sin(t)}dt = \int_{x^3}^{1} \frac{e^t}{Arc\sin(t)}dt - \int_{x^2}^{1} \frac{e^t}{Arc\sin(t)}dt$. Or, d'après la question précédente,

$\int_{x}^{1} \frac{e^t}{Arc\sin(t)}dt = -\ln(x) + o(\ln(x))$ quand x tend vers 0^+. Donc,

$\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{Arc\sin(t)}dt = -\ln(x^3) + o(\ln(x^3)) + \ln(x^2) + o(\ln(x^2))$ quand x tend vers 0^+

$\boxed{\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{Arc\sin(t)}dt = -3\ln(x) + o(3\ln(x)) + 2\ln(x) + o(2\ln(x)) \text{ quand } x \text{ tend vers } 0^+}$

$\boxed{\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{Arc\sin(t)}dt \approx -\ln(x) \text{ quand } x \text{ tend vers } 0^+}$

I.B.1)

Les fonctions $g : t \to \frac{1}{\ln(t)}$ et $t \to t$ sont de classe C^1 sur $[2,+\infty[$. Une **intégration par parties** donne : $\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2}$.

On pose $f : t \to \frac{1}{(\ln(t))^2}$ et on applique au couple (f,g) le résultat de la question **2a)** des préliminaires.

$f = o(g)$ au voisinage de $+\infty$, et g n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$ car continue sur $[2,+\infty[$ et prépondérante sur $t \to \frac{1}{t}$ qui n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$. Donc $\int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2} = o\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Si on ajoute à cela que $\frac{x}{\ln(x)}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on peut en déduire que $\boxed{\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} \approx \frac{x}{\ln(x)}}$ quand x tend vers $+\infty$.

I.B.2)

On montre par récurrence sur $n \geq 0$:

(HR_n) $\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{k!2}{\ln^{k+1}(2)} + (n+1)!\int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^{n+2}}$

(HR_0) a été démontré dans la question précédente.

Supposons (HR_n) pour $n \geq 0$. Une intégration par parties donne

(*) $\int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^{n+2}} = \frac{x}{(\ln(x))^{n+2}} - \frac{2}{(\ln(2))^{n+2}} + (n+2)\int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^{n+3}}$ et (HR_{n+1}) est vraie.

La relation (*) et le résultat de la question **2a)** des préliminaires appliqué au couple (f,g) maintenant défini par $f : t \to \frac{1}{(\ln(t))^{n+3}}$ et $g : t \to \frac{1}{(\ln(t))^{n+2}}$ permettent de conclure en utilisant les mêmes arguments que dans la question précédente ($f = o(g)$ au voisinage de $+\infty$, et g n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$ car continue sur $[2,+\infty[$ et prépondérante sur $t \to \frac{1}{t}$ qui n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$) que :

$\int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^{n+2}} \approx \frac{x}{(\ln(x))^{n+2}}$ quand x tend vers $+\infty$.

Donc $\int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^{n+2}} = o\left(\frac{x}{(\ln(x))^{n+1}}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

En remarquant que tous les termes de la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)}$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on peut négliger la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{k!2}{\ln^{k+1}(2)}$ et conclure que

$$\boxed{\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)} + o\left(\frac{x}{\ln^{n+1}(x)}\right)}$$

I.C.1)

$\forall x \geq 1$, $\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}dt = \int_1^x \frac{e^t}{t^2}dt - \int_1^x \frac{e^t}{t^2(t^2+1)}dt$

et en intégrant successivement deux fois par parties la première de ces deux intégrales :

$\forall x \geq 1$, $\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}dt = \frac{e^x}{x^2} + 2\frac{e^x}{x^3} - 3e + 6\int_1^x \frac{e^t}{t^4}dt - \int_1^x \frac{e^t}{t^2(t^2+1)}dt$

$\forall x \geq 1$, $\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}dt = \frac{e^x}{x^2} + 2\frac{e^x}{x^3} - 3e + \int_1^x \frac{e^t}{t^4}\left(\frac{5t^2+6}{t^2+1}\right)dt$

Le résultat de la question **2b)** des préliminaires appliqué au couple (f,g) défini sur $[1,+\infty[$ par $f : t \to \frac{5e^t}{t^4}$ et $g : t \to \frac{e^t}{t^4}\left(\frac{5t^2+6}{t^2+1}\right)$ permet de conclure en remarquant que $f \approx g$ au voisinage de $+\infty$ et que g n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ car continue sur $[1,+\infty[$ et prépondérante sur $t \to \frac{1}{t}$ qui n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ que

$$\boxed{\int_1^x \frac{5e^t}{t^4}dt \approx \int_1^x \frac{e^t}{t^4}\left(\frac{5t^2+6}{t^2+1}\right)dt \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty.}$$

Pour trouver un équivalent de $\int_1^x \frac{5e^t}{t^4}dt$, on intègre encore un fois par parties :

$\int_1^x \frac{5e^t}{t^4}dt = 5\frac{e^x}{x^4} - 5e + 20\int_1^x \frac{e^t}{t^5}dt$

Le résultat de la question **2a)** des préliminaires appliqué au couple (f,g) maintenant défini par $f : t \to \frac{e^t}{t^5}$ et $g : t \to \frac{e^t}{t^4}$ permettent de conclure en utilisant les mêmes arguments que dans la question précédente ($f = o(g)$ au voisinage de $+\infty$, et g n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ car continue sur $[1,+\infty[$ et prépondérante sur $t \to \frac{1}{t}$ qui n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$) que :

$\boxed{\int_1^x \frac{5e^t}{t^4} \approx \frac{5e^x}{x^4} \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty.}$

On obtient ainsi : $\int_1^x \frac{e^t}{t^4}\left(\frac{5t^2+6}{t^2+1}\right)dt \approx \frac{5e^x}{x^4}$ quand x tend vers $+\infty$ et par là-même :

$\int_1^x \frac{e^t}{t^4}\left(\frac{5t^2+6}{t^2+1}\right)dt = o\left(\frac{e^x}{x^3}\right)$.

D'autre part, la constante $-3e$ est négligeable devant $\frac{e^x}{x^3}$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Finalement : $\boxed{\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}dt = \frac{e^x}{x^2} + 2\frac{e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right)}$.

I.C.2)
Langage Maple :
```
n :=10
 series(exp(-x)*int(exp(t)/(t*t+1),t=1..x),x=infinity,n+1) ;
```

Partie II

II.A
1^er cas : $\alpha \neq 0$
On pose $a' = \max(a,1)$
Le résultat de la question **2b)** des préliminaires appliqué au couple (φ, g) défini sur $[a',+\infty[$ par $\varphi : t \to \frac{f'(t)}{f(t)}$ et $g : t \to \frac{\alpha}{t}$ permet de conclure en remarquant que $\varphi \approx g$ au voisinage de $+\infty$ et que g n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ que

$\int_{a'}^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt \approx \int_{a'}^x \frac{\alpha}{t}dt$ quand x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire :

$\ln(f(x)) - \ln(f(a')) \approx \alpha(\ln(x) - \ln(a'))$ quand x tend vers $+\infty$, ou encore

$\ln(f(x)) \approx \alpha\ln(x)$ quand x tend vers $+\infty$, car les constantes sont négligeables devant $\ln(x)$.

2^ème cas : $\alpha = 0$
On pose $a' = \max(a,1)$

Le résultat de la question **2a)** des préliminaires appliqué au couple (φ, g) défini sur $[a',+\infty[$ par $\varphi : t \to \dfrac{f'(t)}{f(t)}$ et $g : t \to \dfrac{1}{t}$ permet de conclure en remarquant que $\varphi = o(g)$ au voisinage de $+\infty$ et que g n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ que

$$\ln(f(x)) = \ln(f(a')) + \int_{a'}^{x} \frac{f'(t)}{f(t)}dt = o(\ln(x))$$

Dans tous les cas : $\dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$ tend vers α quand x tend vers $+\infty$.

II.B

Etude du cas $\alpha < -1$

II.B.1)

De la question précédente on déduit qu'il existe une fonction ε telle que :

$\ln(f(x)) - \ln(x^{\alpha}) = \varepsilon(x)\ln(x)$, avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$

ou encore $f(x) = x^{\alpha+\varepsilon(x)}$. On écrit que $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$:

Pour $\delta = \dfrac{-1-\alpha}{2} > 0$, $\exists A > 0$, tel que $\forall x \in [a,+\infty[$, $x > \text{A} \Rightarrow \alpha + \varepsilon(x) < \alpha + \delta = \dfrac{-1+\alpha}{2} < -1$

Pour $x > \max(1, A, a)$, $0 < f(x) < x^{\alpha+\delta}$. Par **comparaison avec une fonction de Riemann intégrable sur** $[1,+\infty[$**,** f, qui est continue, est intégrable sur $[a,+\infty[$**.**

II.B.2)

Le résultat de la question **1b)** des préliminaires appliqué au couple (f, g) défini sur $[a,+\infty[$ par $g : t \to \dfrac{f(t)+tf'(t)}{\alpha+1}$, f étant la fonction donnée, permet de conclure en remarquant

que $f \approx g$ au voisinage de $+\infty$

que f est intégrable sur $[a,+\infty[$ et donc g également

que pour $x > \max(1, A, a)$, $0 < xf(x) < x^{\alpha+\delta+1}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$ existe et vaut 0,

$\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt \approx \int_x^{+\infty} \frac{f(t)+tf'(t)}{\alpha+1}dt$ quand x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire :

$\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt \approx -\frac{xf(x)}{\alpha+1}$ quand x tend vers $+\infty$.

II.C

Etude du cas $\alpha > -1$

II.C.1)

De la question **II.A,** on déduit qu'il existe une fonction ε telle que :

$\ln(f(x)) - \ln(x^{\alpha}) = \varepsilon(x)\ln(x)$, avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$

ou encore $f(x) = x^{\alpha+\varepsilon(x)}$. On écrit que $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$:

Pour $\delta = \dfrac{\alpha+1}{2} > 0$, $\exists A' > 0$, tel que $\forall x \in [a,+\infty[$, $x > \text{A}' \Rightarrow \alpha + \varepsilon(x) > \alpha - \delta = \dfrac{-1+\alpha}{2} > -1$

Pour $x > \max(1, A', a)$, $0 < x^{\alpha-\delta} < f(x)$. Par **comparaison avec une fonction de Riemann non intégrable sur** $[1,+\infty[$**,** f, qui est continue, n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$**.**

II.C.2)
Le résultat de la question **2b)** des préliminaires appliqué au couple (f,g) défini sur $[a,+\infty[$ par $g: t \to \dfrac{f(t)+tf'(t)}{\alpha+1}$, f étant la fonction donnée, permet de conclure en remarquant que $f \approx g$ au voisinage de $+\infty$ et que f n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$:

$\int_a^x f(t)dt \approx \int_a^x \dfrac{f(t)+tf'(t)}{\alpha+1}dt$ quand x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire :

$\int_a^x f(t)dt \approx \dfrac{xf(x)}{\alpha+1} - \dfrac{af(a)}{\alpha+1}$ quand x tend vers $+\infty$.

Or, pour $x > \max(1, A', a)$, $0 < x^{\alpha-\delta+1} < xf(x)$ ce qui implique que $xf(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et est prépondérante sur la constante $af(a)$.

$$\boxed{\int_a^x f(t)dt \approx \frac{xf(x)}{\alpha+1} \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty.}$$

II.C.3)
La fonction $f: t \to 2+\sin(t)$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, strictement positive.
$\dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(2+\sin x)}{\ln x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et 0 est bien strictement supérieur à –1. Pourtant $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (2+\sin t)dt = 2x - \cos x + 1$, qui n'est pas équivalent à $x(2+\sin x)$ quand x tend vers $+\infty$, car le rapport $\dfrac{2x-\cos x+1}{2x+x\sin x}$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

II.D
II.D.1)
Classique : le changement de variable $x \to \ln(x)$ ramène à l'étude des fonctions de Riemann.
L'application $x \to \dfrac{1}{x(\ln(x))^\beta}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$ si et seulement si $\beta > 1$.

II.D.2)
On applique les résultats des questions **II.B** et **II.C** à la fonction $f: x \to \dfrac{1}{x^\gamma (\ln x)^\beta}$.

f est de classe C^1 sur $[2,+\infty[$ et $\dfrac{xf'(x)}{f(x)} = -\left(\gamma + \dfrac{\beta}{\ln x}\right)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xf'(x)}{f(x)}$ existe et vaut $-\gamma$.

Si $\gamma > 1$, f est intégrable sur $[2,+\infty[$, d'après **II.B.1).**
Si $\gamma < 1$, f n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$, d'après **II.C.1).**

II.E
Les fonctions $f_\beta : x \to \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$ fournissent des exemples de fonctions de classe C^1 sur $[2,+\infty[$, pour lesquelles $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xf'(x)}{f(x)}$ existe et vaut -1. Certaines de ces fonctions sont intégrables (pour $\beta > 1$), d'autres ne le sont pas (pour $\beta \le 1$).

Partie III

III.A

$\forall u \in IR^+, \dfrac{h'(u)}{h(u)} = -\alpha + \dfrac{f'(u)}{f(u)}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Pour $\varepsilon > 0, \exists A > 0$ tel que $\forall u \in IR^+,\ u > A \Rightarrow \left| -\alpha + \dfrac{f'(u)}{f(u)} \right| < \varepsilon$

Il existe donc $n_0 = E(A) + 2 \in IN$, tel que

$\forall n \in IN,\ n > n_0 \Rightarrow \forall t \in [n-1, n]$ et $\forall u \in [t, n]$ $\left| \dfrac{h'(u)}{h(u)} \right| < \varepsilon$

En intégrant sur $[t, n]$ dont la longueur est inférieure à 1:

$\forall n \in IN,\ n > n_0 \Rightarrow \forall t \in [n-1, n]\ \left| \int_t^n \dfrac{h'(u)}{h(u)} du \right| \le \int_t^n \left| \dfrac{h'(u)}{h(u)} \right| du \le \varepsilon$

ce qui donne : $|\ln(h(n)) - \ln(h(t))| \le \varepsilon$.

Si $\ln(h(n)) - \ln(h(t)) \le 0$, on en déduit : $\ln(h(t)) \le \ln(h(n)) + \varepsilon$

Et par croissance de l'exponentielle, $h(t) \le h(n)e^{\varepsilon}$, donc $h(t) - h(n) \le h(n)(e^{\varepsilon} - 1)$.

Si $\ln(h(n)) - \ln(h(t)) > 0$, on en déduit : $\ln(h(t)) \ge \ln(h(n)) - \varepsilon$

Et par croissance de l'exponentielle, $h(t) \ge h(n)e^{-\varepsilon}$, donc $h(n) - h(t) \le h(n)(1 - e^{-\varepsilon})$.

Or, $0 < 1 - e^{-\varepsilon} = e^{-\varepsilon}(e^{\varepsilon} - 1) \le e^{\varepsilon} - 1$, car $\varepsilon > 0$.

On peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in IN,\ n > n_0 \Rightarrow \forall t \in [n-1, n] \quad |h(t) - h(n)| < h(n)(e^{\varepsilon} - 1)}$$

III.B

On remarque $f(t) = e^{\alpha t}(h(t) - h(n)) + e^{(t-n)\alpha} f(n)$

Ce qui donne : $\int_{n-1}^n f(t)dt = e^{-\alpha n} f(n) \int_{n-1}^n e^{\alpha t} dt + \int_{n-1}^n e^{\alpha t}(h(t) - h(n))dt$

Puis $\int_{n-1}^n f(t)dt = \dfrac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} f(n) + \int_{n-1}^n e^{\alpha t}(h(t) - h(n))dt$, car $\alpha \ne 0$.

De la question précédente, on peut déduire une majoration de la différence

$$\left| \int_{n-1}^n f(t)dt - \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} f(n) \right| = \left| \int_{n-1}^n e^{\alpha t}(h(t) - h(n))dt \right| \le \int_{n-1}^n e^{\alpha t} |h(t) - h(n)| dt$$

$$\forall n \in IN,\ n > n_0 \Rightarrow \left| \int_{n-1}^n f(t)dt - \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} f(n) \right| \le h(n)(e^{\varepsilon} - 1) \frac{e^{\alpha n}(1 - e^{-\alpha})}{\alpha} = f(n)(e^{\varepsilon} - 1) \frac{(1 - e^{-\alpha})}{\alpha}$$

Si on a pris soin de choisir ε de telle sorte que $e^{\varepsilon} - 1$ soit strictement inférieur à un ε' strictement positif quelconque, on en déduit :

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists n_0 \in IN \text{ tel que } \forall n \in IN, n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{\int_{n-1}^n f(t)dt}{\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} f(n)} - 1 \right| < \varepsilon'$$

c'est-à-dire $\boxed{\int_{n-1}^{n} f(t)dt \approx \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} f(n)}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

III.C

III.C.1)
Les fonctions u et v sont des fonctions en escalier, constantes sur les intervalles $[k-1,k]$pour $k \in IN$, donc $\int_{k-1}^{k} v(t)dt = \int_{k-1}^{k} f(t)dt$ et $\int_{k-1}^{k} u(t)dt = f(k)$.

III.C.2)
Comme $\alpha \neq 0$, on déduit de la question **III.B**, que $u(t) \approx \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} v(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
La fonction f est intégrable et positive sur $[0,+\infty[$. Donc, la suite des intégrales de f sur une suite exhaustive de segments $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in IN}$ est bornée.
$\int_0^n v(t)dt = \int_0^n f(t)dt$ d'après le **III.C.1).**
La fonction v est continue par morceaux et positive sur $[0,+\infty[$. La suite des intégrales de v sur une suite exhaustive de segments $\left(\int_0^n v(t)dt\right)_{n\in IN}$ est bornée, donc v est intégrable sur $[0,+\infty[$.
On applique le résultat de la question **1b)** des préliminaires au couple $\left(u, \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} v\right)$ en remarquant que $u \approx \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} v$ au voisinage de $+\infty$ et que v est intégrable sur $[0,+\infty[$:
$\int_x^{+\infty} u(t)dt \approx \int_x^{+\infty} \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} v(t)dt$ quand x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire :
$\int_x^{+\infty} f(t)dt \approx \int_x^{+\infty} \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} v(t)dt$ quand x tend vers $+\infty$.
D'autre part, la série de terme général $f(n)$ est à termes tous positifs et
$f(n) \approx \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_{n-1}^{n} f(t)dt$
Posons $w_n = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_{n-1}^{n} f(t)dt$. La série de terme général w_n est à termes tous positifs, ses sommes partielles sont bornées, en effet :
$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_{k-1}^{k} f(t)dt = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_0^n f(t)dt$ qui est bornée car f est intégrable et positive sur $[0,+\infty[$.
Donc la série de terme général w_n est convergente et par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } f(n) \text{ est convergente}}$.

Son reste relatif au rang n est égal à $R_n = \int_n^{+\infty} u(t)dt = \int_x^{+\infty} f(t)dt$, qui d'après le résultat de la question **1b)** des préliminaires est équivalent à $\int_n^{+\infty} \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} v(t)dt = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_n^{+\infty} f(t)dt$

III.C.3)

Comme $\alpha \neq 0$, on déduit de la question **III.B**, que $u(t) \approx \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} v(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

La fonction f est non intégrable et positive sur $[0,+\infty[$. Donc, la suite des intégrales de f sur une suite exhaustive de segments $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in IN}$ tend vers $+\infty$.

$\int_0^n v(t)dt = \int_0^n f(t)dt$ d'après le **III.C.1).**

La fonction v est continue par morceaux et positive sur $[0,+\infty[$. La suite des intégrales de v sur une suite exhaustive de segments $\left(\int_0^n v(t)dt\right)_{n\in IN}$ est non bornée, donc v n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$.

On applique le résultat de la question **2b)** des préliminaires au couple $\left(u, \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} v\right)$ en remarquant que $u \approx \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} v$ au voisinage de $+\infty$ et que v n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$:

$\int_0^x u(t)dt \approx \int_0^x \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} v(t)dt$ quand x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire :

$\int_0^x f(t)dt \approx \int_0^x \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} v(t)dt$ quand x tend vers $+\infty$.

D'autre part, la série de terme général $f(n)$ est à termes tous positifs et

$f(n) \approx \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_{n-1}^n f(t)dt$

Posons $w_n = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_{n-1}^n f(t)dt$. La série de terme général w_n est à termes tous positifs, ses sommes partielles ne sont pas bornées, en effet :

$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_{k-1}^k f(t)dt = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_0^n f(t)dt$ qui n'est pas bornée car f est non intégrable et positive sur $[0,+\infty[$.

Donc la série de terme général w_n est divergente et par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } f(n) \text{ est divergente}}$.

Sa somme partielle de rang n est égal à $S_n = \int_0^n u(t)dt = \int_0^n f(t)dt$, qui d'après le résultat de la question **2b)** des préliminaires est équivalente à $\int_0^n \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} v(t)dt = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_0^n f(t)dt$.

III.D

On suppose $\alpha = 0$. Un travail analogue à celui du **III.B** à partir de la conclusion du **III.A :**
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN$ tel que $\forall n \in IN,\ n > n_0 \Rightarrow \forall t \in [n-1, n] \quad |f(t) - f(n)| < f(n)(e^{\varepsilon} - 1)$

fournit $\int_{n-1}^{n} f(t)dt \approx f(n)$ quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire $v \approx u$ au voisinage de $+\infty$. On peut reprendre le travail des questions **III.C.2)** et **III.C.3)** en remplaçant la constante $\dfrac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}$ par 1.

La série de terme général $f(n)$ est convergente si et seulement si f est intégrable sur $[0,+\infty[$ avec $R_n \approx \int_n^{+\infty} f(t)dt$ en cas de convergence et $S_n \approx \int_0^n f(t)dt$ en cas de divergence.

Partie IV

IV.A

Dans les calculs ci-dessous, j'utiliserai le fait que les intégrales de f sur le segment $[0,1]$ ou $[0,2]$ est négligeable devant une suite qui tend vers $+\infty$.

IV.A.1)

La fonction $t \to \dfrac{1}{t}$ est de classe C^1 et strictement positive sur $[1,+\infty[$. On la prolonge en une fonction f, de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et strictement positive.

$\forall t \geq 1,\ \dfrac{f'(t)}{f(t)} = -\dfrac{1}{t}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

La fonction f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$.

On applique le **III.D.**

La série harmonique diverge et $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \approx \int_1^n \dfrac{dt}{t} = \ln n$

IV.A.2)

La fonction $t \to \ln t$ est de classe C^1 et strictement sur $[2,+\infty[$. On la prolonge en une fonction f, de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et strictement positive.

$\forall t \geq 1,\ \dfrac{f'(t)}{f(t)} = \dfrac{1}{t\ln t}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

La fonction f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ car elle tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$.

On applique le **III.D.**

La série de terme général $\ln n$ diverge et $\sum_{k=1}^{n} \ln k \approx \int_2^n \ln t dt \approx n \ln n$

Calcul : $\int_2^n \ln t dt = [t\ln t - t]_2^n = n\ln n - n + -2\ln 2 + 2$

IV.A.3)

La fonction $t \to 2^t \ln t$ est de classe C^1 et strictement positive sur $[2,+\infty[$. On la prolonge en une fonction f, de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et strictement positive.

$\forall t \geq 1,\ \dfrac{f'(t)}{f(t)} = \ln 2 + \dfrac{1}{t\ln t}$ tend vers $\ln 2$ quand t tend vers $+\infty$.
La fonction f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ car elle tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$.
On applique le **III.C.3)**

> La série de terme général $2^n \ln n$ diverge et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k \ln k \approx 2\ln 2 \int_{1}^{n} 2^t \ln t dt$.

Calcul : on intègre par parties $\displaystyle\int_2^n 2^t \ln t dt = \frac{2^n \ln n - 4\ln 2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int_2^n \frac{2^t}{t} dt$

On pose $g : t \to \dfrac{2^t}{t}$ et et on applique au couple (g, f) le résultat de la question **2a)** des préliminaires. En effet, $g = o(f)$ au voisinage de $+\infty$, et f n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$ car continue sur $[2,+\infty[$ et prépondérante sur $t \to \ln t$ qui n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$. Donc $\displaystyle\int_2^n \frac{2^t}{t} dt = o\left(\int_2^n 2^t \ln t dt\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Si on ajoute à cela que $\dfrac{2^n \ln n}{\ln 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on peut en déduire que $\displaystyle\int_2^n 2^t \ln t dt \approx \frac{2^n \ln n}{\ln 2}$ quand n tend vers $+\infty$.

> Finalement, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k \ln k \approx 2^{n+1} \ln n$ quand n tend vers $+\infty$.

IV.B

IV.B1)
On applique les résultats de la question préliminaire **1.b)** aux fonctions f et g en escalier sur $[0,+\infty[$, définies par :
$\forall n \in IN, \forall t \in [n, n+1[,\quad f(t) = a_n$ et $g(t) = b_n$.
Ces fonctions sont équivalentes quand x tend vers $+\infty$. f est intégrable sur $[0,+\infty[$, car en escalier, positive, et que la suite de ses intégrales sur une suite exhaustive de segments $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in IN}$ est bornée (par la somme de la série de terme général positif a_n).

On en déduit que $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \approx \int_{n+1}^{+\infty} g(t)dt$, autrement dit :

> $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \approx \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$ quand n tend vers $+\infty$.

IV.B.2)
On applique les résultats de la question préliminaire 2.**b)** aux fonctions f et g en escalier sur $[0,+\infty[$, définies comme ci-dessus
Ces fonctions sont équivalentes quand x tend vers $+\infty$. f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$, car en escalier, positive, et que la suite de ses intégrales sur une suite exhaustive de segments

$\left(\int_0^{n+1} f(t)dt\right)_{n\in IN}$ n'est pas bornée. En effet $\int_0^{n+1} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} a_k$, somme partielle d'une série divergente à termes positifs, tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

On en déduit que $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \approx \int_{n+1}^{+\infty} g(t)dt$, autrement dit :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \approx \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.}$$

IV.C

IV.C.1) On applique le résultat du **IV.B.1)** aux suites de terme général $\left(a_n = -\dfrac{1}{2n^2}\right)_{n\in IN}$ et $\left(b_n = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in IN}$, qui sont à termes négatifs à partir du rang 2, équivalentes.

Ces séries convergent. Donc $R_n(a) \approx R_n(b)$.

On note γ la somme de la série de terme général b_n.

$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n = \gamma - R_n(b)$

Pour déterminer un équivalent simple de $R_n(a) \approx R_n(b)$, on utilise le résultat de la question **III.D.** En effet la fonction $t \to \dfrac{1}{t^2}$ est de classe C^1 et strictement positive sur $[1,+\infty[$. On la prolonge en une fonction *f*, de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et strictement positive.

$\forall t \geq 1,\ \dfrac{f'(t)}{f(t)} = -\dfrac{2}{t}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

La fonction *f* est intégrable sur $[0,+\infty[$.

La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} \approx \int_n^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2} = \dfrac{1}{n}$.

Finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

IV.C.2)

On pose $b_n = 1 + \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ pour $n \geq 2$ et $b_0 = 0$, $b_1 = 1$. Alors $S_n(b) = \ln\left(\dfrac{n!e^n}{n^{n+1/2}}\right)$.

On applique le résultat du **IV.B.1)** aux suites de terme général $\left(a_n = -\dfrac{1}{12n^2}\right)_{n\in IN}$ et $(b_n)_{n\in IN}$, qui sont à termes négatifs à partir d'un certain rang, équivalentes.

En effet $b_n = 1 + \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1 + \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = -\dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Ces séries convergent. Donc $R_n(a) \approx R_n(b)$.

On note B la somme de la série de terme général b_n.

$S_n(b) = B - R_n(b)$.

On connaît un équivalent simple de $R_n(a) \approx R_n(b)$, car la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} \approx \int_n^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2} = \dfrac{1}{n}$.

On en déduit $S_n(b) = \ln\left(\dfrac{n!e^n}{n^{n+1/2}}\right) = B + \dfrac{1}{12n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Et en passant à l'exponentielle :

$\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = e^B e^{\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$, ce qui donne le résultat demandé en posant $\delta = e^B$ et en faisant un développement limité de l'exponentielle à l'ordre 1 au voisinage de 0.

$$\boxed{n! = \delta n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

IV.C.3)

On connaît la valeur de δ grâce à la formule de Stirling : $\delta = \sqrt{2\pi}$.

fin