CONCOURS Centrale-Supélec 2003 Filière PSI
MATHEMATIQUES I

Partie I - Polynômes de Hilbert

I.A.1) Pour tout $k\in \{0, 1, 2, \ldots ,n\}$, $T_n(X^k) = (X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i X^i$

$$M_n = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} T_n(1) & T_n(X) & T_n(X^2) & & T_n(X^k) & & T_n(X^n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & C_k^0 & \ldots & C_n^0 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & C_k^1 & \ldots & C_n^1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & C_k^2 & \ldots & C_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & C_k^k & \ldots & C_n^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & C_n^n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \ldots \\ X^k \\ \ldots \\ X^n \end{array} \end{array}$$

M_n est une matrice de $\mathrm{M}_{n+1}(\mathbf{R})$, de terme général $m_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i > j \\ C_j^i \text{ si } i \le j \end{cases}$, $\begin{array}{l} 0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n \end{array}$

1.A.2) M_n est une matrice triangulaire supérieure, dont le déterminant vaut 1. Elle est donc inversible.

On peut aussi remarquer que l'application $U_n : P(X) \to P(X-1)$ est un endomorphisme de $\mathbf{C}_n[X]$, tel que $U_n \circ T_n = T_n \circ U_n = \mathrm{I}d$

T_n est donc inversible, et admet pour inverse U_n.

M_n, matrice de T_n dans la base canonique de $\mathbf{C}_n[X]$ est inversible, et admet pour inverse la matrice de U_n dans cette base.

Pour tout $k\in \{0, 1, 2, \ldots ,n\}$, $U_n(X^k) = (X-1)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i X^i$

$$M_n^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} U_n(1) & U_n(X) & U_n(X^2) & & U_n(X^k) & & U_n(X^n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \ldots & (-1)^k C_k^0 & \ldots & (-1)^n C_n^0 \\ 0 & 1 & -2 & \ldots & (-1)^{k-1} C_k^1 & \ldots & (-1)^{n-1} C_n^1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & (-1)^{k-2} C_k^2 & \ldots & (-1)^{n-2} C_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & C_k^k & \ldots & (-1)^k C_n^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & C_n^n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \ldots \\ X^k \\ \ldots \\ X^n \end{array} \end{array}$$

M_n^{-1} a pour terme général $m'_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i > j \\ (-1)^{j-i}\, C_j^i \text{ si } i \le j \end{cases}$, $\begin{array}{l} 0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n \end{array}$

I.B.1) $H_k(X) = \dfrac{1}{k!} X(X-1)(X-2)\ldots(X-k+1)$ Donc $\deg(H_k) = k$.

La famille $(H_0, H_1, H_2, \ldots , H_n)$ formée de polynômes de degrés deux à deux distincts, est libre.

Elle est formée de n+1 vecteurs de $\mathbf{C}_n[X]$, qui est un espace de dimension n+1. C'en est donc une base.

I.B.2) $H_i(j) = \frac{1}{i!} j(j-1)(j-2)\ldots(j-i+1)$

- si $j \in \{0, 1, 2, \ldots, i-1\}$, $H_i(j) = 0$
- si $j \geq i$, $H_i(j) = \frac{j(j-1)\ldots(j-i+1)}{i!} = \frac{j!}{i!(j-i)!} = C_j^i$
- si $j < 0$, $H_i(j) = \frac{j(j-1)\ldots(j-i+1)}{i!}$

$$H_i(j) = \frac{(-1)^i(-j)(-j+1)(-j+2)\ldots(-j+i-1)}{i!} = \frac{(-1)^i(-j+i-1)!}{i!(-j-1)!} = (-1)^i C_{-j+i-1}^i$$

Dans les trois cas, $H_i(j) \in \mathbf{Z}$.

I.C.1) $(H_0, H_1, H_2, \ldots, H_n)$ étant une base de $\mathbf{C}_n[X]$, tout polynôme P de $\mathbf{C}_n[X]$ peut se décomposer sur cette base :

$\exists(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$, tel que $P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i$

Pour tout $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $P(k) = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i(k)$.

D'après I.B.2), lorsque $k \in \{0, 1, 2, \ldots, i-1\}$, $H_i(k) = 0$

et lorsque $k \geq i$, $H_i(k) = C_k^i$

donc $P(k) = \sum_{i=0}^{k} a_i H_i(k) = \sum_{i=0}^{k} a_i C_k^i = \sum_{i=0}^{k} a_i m_{i,k} = \sum_{i=0}^{n} m_{i,k} a_i$ $\qquad$ ($m_{i,k} = 0$ si $i > k$)

$$P(k) = \sum_{i=0}^{n} ({}^t M_n)_{k,i} a_i = \left[{}^t M_n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} \right]_k$$, ceci pour tout $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

Soit, matriciellement, $\begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \ldots \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^t M_n . \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$

I.C.2) M_n étant inversible, sa transposée l'est aussi. En inversant la relation précédente,

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = ({}^t M_n)^{-1} \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \ldots \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^t(M_n^{-1}) \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \ldots \\ P(n) \end{pmatrix}$$

- Pour tout $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $a_i = \sum_{j=0}^{n} [{}^t(M_n^{-1})]_{i,j} P(j) = \sum_{j=0}^{n} (M_n^{-1})_{j,i} P(j)$

$a_i = \sum_{j=0}^{i} (M_n^{-1})_{j,i} P(j)$ $\qquad$ (M_n^{-1} est triangulaire supérieure)

$a_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j P(j)$ d'après les relations I.A2)

- Si $i \geq n+1$, l'égalité $P = \sum_{j=0}^{n} a_j H_j$ dans $\mathbf{C}_n[X]$, peut être vue comme une égalité dans $\mathbf{C}_i[X]$:

$P = \sum_{j=0}^{i} a_j H_j$ avec $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_i = 0$.

Ceci est possible car les vecteurs de la base $(H_0, H_1, H_2, \ldots, H_n)$ de $\mathbf{C}_n[X]$ ne dépendent pas de n, sont stables par passage de n à n+1.

Dans $\mathbf{C}_i[X]$, la relation $a_k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j P(j)$ qui vient d'être établie, est valable pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, n+1, n+2, \dots, i\}$ et donc pour $k = i$,

ce qui donne $\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}C_i^j P(j) = a_i = 0$.

Donc, lorsque $i \geq n+1$, $\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}C_i^j P(j) = 0$.

I.C.3) • Il est clair que c) $\Rightarrow$ a)

• Si $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $P(i) \in \mathbf{Z}$, alors $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $a_i \in \mathbf{Z}$, d'après les relations $a_i = \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}C_i^j P(j)$

Ceci montre que a) $\Rightarrow$ b)

• On a vu que pour tout i de $\mathbf{N}$ et tout j de $\mathbf{Z}$, $H_i(j) \in \mathbf{Z}$. (cf I.B.2)

Si pour tout i de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, $a_i \in \mathbf{Z}$, la relation $P(j) = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i(j)$ montre que pour tout j de $\mathbf{Z}$, $P(j) \in \mathbf{Z}$.

De sorte que b) $\Rightarrow$ c)

On a ainsi prouvé que les trois propositions a), b) et c) sont équivalentes.

En particulier, les implications a) $\Rightarrow$ b) et b) $\Rightarrow$ c) montrent que les polynômes P de $\mathbf{C}[X]$ pour lesquels $P(\mathbf{N}) \subset \mathbf{Z}$ sont les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbf{Z}$ des polynômes de Hilbert et eux seulement.

I.D) • On a vu en I.C.2) que si $P \in \mathbf{C}_n[X]$, alors pour tout $i \geq n+1$, $\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}C_i^j P(j) = 0$.

Ceci montre que a) $\Rightarrow$ b)

• Réciproquement, soit $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite complexe telle que $\forall i \geq n+1$, $\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}C_i^j u_j = 0$.

Il existe un (unique) polynôme P de $\mathbf{C}_n[X]$ tel que

$$\begin{cases} P(0) = u_0 \\ P(1) = u_1 \\ \dots \\ P(n) = u_n \end{cases}$$ (qui peut être déterminé par exemple comme le polynôme d'interpolation de Lagrange)

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u_k = P(k)$.

C'est déjà vérifié par construction de $P(X)$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Supposons que jusqu'à l'ordre $k-1 \geq n$, $u_j = P(j)$.

La relation $\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j u_j = 0$ permet d'exprimer le terme u_k en fonction des termes précédents :

$$u_k = -\left(\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}C_k^j u_j\right)$$

Mais, d'après I.C.2) et l'appartenance de P à $\mathbf{C}_n[X]$, la relation $\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j P(j) = 0$ donne également

$$P(k) = -\left(\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}C_k^j P(j)\right)$$

et, puisque par hypothèse de récurrence, $u_j = P(j)$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$, il s'ensuit que $u_k = P(k)$.

La propriété $u_j = P(j)$ est alors vérifiée jusqu'à l'ordre k, ce qui montre par récurrence que $\forall k \in \mathbf{N}$, $u_k = P(k)$.

On a ainsi montré que b) $\Rightarrow$ a)

Partie II - Quelques propriétés des séries entières

II.A.1) $\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})e^{-ipt}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{a_n r^n e^{i(n-p)t}}_{u_n(t)}\,dt$

$\|u_n\|_{[-\pi,\pi]}^{\infty} = \sup_{t\in[-\pi,\pi]}|u_n(t)| = |a_n|\, r^n$

La série entière $\sum a_n z^n$ est absolument convergente en tout point de son disque ouvert de convergence $D_R = \{z\in \mathbf{C} \,/\, |z| < R\}$; r appartient à ce disque puisque $r\in\,]\,|\omega|, R\,[$. Donc $\sum |a_n|\, r^n$ converge et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-\pi,\pi]$.

De la convergence uniforme car normale de $\sum u_n$ s'ensuit que $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)\,dt\right)$

c'est à dire $\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})e^{-ipt}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n r^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)t}\,dt\right)$

or $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)t}\,dt = \begin{cases}\left[\dfrac{e^{i(n-p)t}}{i(n-p)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \text{ si } n \neq p\\ 2\pi \quad \text{si} \quad n = p\end{cases}$

Dans la série de droite ne reste que le terme obtenu pour $n = p$.

Donc $\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})e^{-ipt}\,dt = a_p\, r^p.2\pi$, ce qui est le résultat demandé.

II.A.2) Remarquons que, puisque $r\in\,]\,|\omega|, R\,[$, pour tout t de $[-\pi,\pi]$, $|\, re^{it}\,| = |\, r\,| < |\,\omega\,|$.

La fonction $t \to re^{it} - \omega$ ne s'annule pas et est continue sur $[-\pi,\pi]$. L'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{re^{it}}{re^{it}-\omega} f(re^{it})\,dt$ est bien définie.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{re^{it}}{re^{it}-\omega} f(re^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1-\dfrac{\omega}{re^{it}}} f(re^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\underbrace{\left(\frac{\omega}{re^{it}}\right)^p f(re^{it})}_{v_p(t)}\right]dt$$

(le développement en série de $\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega}{re^{it}}}$ étant possible car $\left|\dfrac{\omega}{re^{it}}\right| < 1$)

La somme de la série entière $z \to f(z)$ est continue en tout point du disque ouvert de convergence D_R.
Quand t décrit $[-\pi,\pi]$, re^{it} décrit $C_r = \{z\in \mathbf{C} \,/\, |z| = r\} \subset D_R$.
Par composition, la fonction $t \to f(re^{it})$ est continue sur le segment $[-\pi,\pi]$. Elle y est donc bornée, et atteint son maximum.

Ceci justifie l'existence de $M_f(r) = \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(re^{it})| = \operatorname{Max}_{t\in[-\pi,\pi]} |f(re^{it})| = \operatorname{Max}_{z\in C_r} |f(z)|$

$\forall t\in[-\pi,\pi]$, $|v_p(t)| = \left|\left(\dfrac{\omega}{re^{it}}\right)^p f(re^{it})\right| \leq \left(\dfrac{|\omega|}{r}\right)^p M_f(r)$

La série géométrique $\sum\left(\dfrac{|\omega|}{r}\right)^p M_f(r)$ converge puisque $|\omega| < r$ et la série de fonctions $\sum v_p$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[-\pi,\pi]$.

Alors $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} v_p(t)\right)dt = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} v_p(t)\,dt\right)$

Donc $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{re^{it}}{re^{it}-\omega}f(re^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\omega^p}{r^p}\left(\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ipt}f(re^{it})dt\right)$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\omega^p}{r^p}.2\pi a_p r^p = \sum_{p=0}^{+\infty}a_p\omega^p = f(\omega)$$

II.B.1) voir la question précédente

II.B.2) De l'égalité II.A.2) on tire la majoration $|f(\omega)| \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{re^{it}}{re^{it}-\omega}f(re^{it})\right|dt$

$$|f(\omega)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r}{|re^{it}-\omega|}M_f(r)dt$$

$|re^{it}-\omega|^2 = (re^{it}-\omega)(re^{-it}-\varpi) = r^2 - r(\omega e^{-it}+\varpi e^{it}) + \omega\varpi$ $\quad (\omega e^{-it}+\varpi e^{it})$ est réel et

$\omega e^{-it}+\varpi e^{it} \le |\omega e^{-it}+\varpi e^{it}| \le |\omega| + |\varpi| = 2|\omega|$ donc $-r(\omega e^{-it}+\varpi e^{it}) \ge -2r|\omega|$

d'où $|re^{it}-\omega|^2 \ge r^2 - 2r|\omega| + |\omega|^2 = (r-|\omega|)^2$

et finalement $\dfrac{1}{|re^{it}-\omega|} \le \dfrac{1}{r-|\omega|}$

alors, $|f(\omega)| \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{r}{r-|\omega|}M_f(r)}_{\text{fonction constante}}dt = \frac{r}{r-|\omega|}M_f(r)$

II.B.3) Soit p un entier naturel quelconque.

f^2, comme produit de deux séries entières de rayon de convergence $\ge R$, est aussi une série entière de rayon $\ge R$.
Par récurrence immédiate, il en est de même de f^p. Ainsi, $f^p \in E_R$.

Par ailleurs, soit $z_0 \in C_r$ tel que $|f(z_0)| = M_f(r) = \operatorname{Max}_{z\in C_r}|f(z)|$

$\forall z \in C_r$, $|f(z)| \le |f(z_0)|$ et donc $|f(z)|^p \le |f(z_0)|^p = (M_f(r))^p$

d'où $\operatorname{Max}_{z\in C_r}|f^p(z)| \le (M_f(r))^p$ c'est à dire $M_{f^p}(r) \le (M_f(r))^p$

En appliquant le résultat II.B.2) à la série entière f^p, on obtient $|f^p(\omega)| \le \dfrac{r}{r-|\omega|}M_{f^p}(r)$ et donc

$$|f^p(\omega)| \le \frac{r}{r-|\omega|}\left(M_f(r)\right)^p$$

Ces réels sont tous positifs, en prenant la racine $p^{\text{ième}}$, $|f(\omega)| \le \left(\dfrac{r}{r-|\omega|}\right)^{1/p}M_f(r)$

Or pour tout réel $a>0$, $\lim_{p\to+\infty} a^{1/p} = 1$

En passant à la limite dans l'inégalité précédente lorsque $p \to +\infty$, on obtient donc $|f(\omega)| \le M_f(r)$

II.C.1) Puisque $|\omega| < R$, la série $\sum_{n\ge 0} a_n\omega^n$ converge. Il en est de même de la série $\sum_{n\ge 1+j} a_n\omega^{n-1-j}$

II.C.2) $\forall j \in \mathbf{N}$, $|b_j| = \left|\displaystyle\sum_{n=j+1}^{+\infty}a_n\omega^{n-1-j}\right| \le \sum_{n=j+1}^{+\infty}|a_n||\omega|^{n-1-j} \le \sum_{n=j+1}^{+\infty}|a_n|r^{n-1-j} \le \frac{1}{r^{1+j}}\sum_{n=j+1}^{+\infty}|a_n|r^n$

(la série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et ici, $r < R$)

Notons $R_m(z) = \displaystyle\sum_{n=m+1}^{+\infty}|a_n||z|^n$ le reste d'ordre m de la série convergente $\sum|a_n|z^n$

On sait que $\lim_{m\to+\infty} R_m(z) = 0$

Ainsi, $\forall j \in \mathbf{N}$, $|b_j| \le \dfrac{1}{r^{1+j}}R_j(r)$ où l'on a $\lim_{j\to+\infty} R_j(r) = 0$

Ce qui montre que $b_j = o\left(\dfrac{1}{r^{1+j}}\right)$ lorsque $j \to +\infty$ (et à fortiori que $b_j = O\left(\dfrac{1}{r^j}\right)$)

II.C.3) • Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < R$.

Soit alors r' tel que $|z| < r' < R$ et $|\omega| < r'$

d'après II.C.2), $b_j = O\left(\dfrac{1}{r'^j}\right)$ lorsque $j \to +\infty$ et donc $|\, b_j z^j | = O\left(\dfrac{z^j}{r'^j}\right) = O\left(\left|\dfrac{z}{r'}\right|^j\right)$, série cvgente car $\left|\dfrac{z}{r'}\right| < 1$

La série $\sum b_j z^j$ converge pour tout complexe z tel que $|z| < R$. Son rayon de convergence est donc $\geq R$.

• $\forall z \in D_R$, , $(z - \omega)g(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^{j+1} - \omega.\sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^j$

par ailleurs, $b_j = \displaystyle\sum_{n=j+1}^{+\infty} a_n \omega^{n-1-j} = a_{j+1} + a_{j+2}\,\omega + a_{j+3}\,\omega^2 + ...$

$b_{j+1} = \displaystyle\sum_{n=j+2}^{+\infty} a_n \omega^{n-2-j} = a_{j+2} + a_{j+3}\,\omega + \omega^2\, a_{j+4}\,\omega^2 + ...$ donc $b_j = \omega\, b_{j+1} + a_{j+1}$

d'où $(z - \omega)g(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} (\omega b_{j+1} + a_{j+1}) z^{j+1} - \omega.\sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^j$

$(z - \omega)g(z) = \omega \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} b_j z^j - \omega.\sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^j + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j z^j = -\,\omega\, b_0 + f(z) - a_0$

or $b_0 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \omega^{n-1}$ et $\omega\, b_0 = f(\omega) - a_0$

et donc $(z - \omega)g(z) = f(z) - f(\omega)$

II.D.1) Soit $\mathbf{Q}_p$ la proposition : si $f \in E_R$ s'annule en p points distincts $z_1, z_2, ... , z_p$ de $\overline{D}_r$ - {0}, alors il existe $F \in E_R$

telle que : $\forall z \in D_R$, $F(z)\displaystyle\prod_{j=1}^{p}(z - z_j) = f(z)\prod_{j=1}^{p}(r^2 - \bar{z}_j z)$

• Pour $p = 1$, soit $f \in E_R$ s'annulant en $z_1 \in \overline{D}_r$ - {0} ; la relation II.C.3) $(z - \omega)g(z) = f(z) - f(\omega)$ est valable pour tout ω et pour tout z de D_R, en particulier en prenant z_1 pour ω :

il existe $g_1 \in E_R$ telle que $(z - z_1)g_1(z) = f(z) - f(z_1) = f(z)$

alors $(z - z_1)g_1(z)(r^2 - \bar{z}_1 z) = f(z)(r^2 - \bar{z}_1 z)$

en posant $F_1(z) = g_1(z)(r^2 - \bar{z}_1 z)$, qui est bien une série entière en z de rayon $\geq R$ car $g_1 \in E_R$, on a :

$\forall z \in D_R$, $(z - z_1)F_1(z) = f(z)(r^2 - \bar{z}_1 z)$

La relation $\mathbf{Q}_1$ est ainsi démontrée.

• Supposons la proposition $\mathbf{Q}_p$ vérifiée, et soit $f \in E_R$ s'annulant en p+1 points distincts $z_1, z_2, ... , z_{p+1}$ de $\overline{D}_r$ - {0}.

f s'annulant déjà en p points distincts $z_1, z_2, ... , z_p$ de $\overline{D}_r$ - {0}, par hypothèse de récurrence, il existe $F_1 \in E_R$ telle que :

$\forall z \in D_R$, $F_1(z)\displaystyle\prod_{j=1}^{p}(z - z_j) = f(z)\prod_{j=1}^{p}(r^2 - \bar{z}_j z)$

alors $F_1(z_{p+1})\underbrace{\displaystyle\prod_{j=1}^{p}(z_{p+1} - z_j)}_{\neq 0} = \underbrace{f(z_{p+1})}_{=0}\displaystyle\prod_{j=1}^{p}(r^2 - \bar{z}_j z_{p+1})$ donc $F_1(z_{p+1}) = 0$.

Alors, d'après $\mathbf{Q}_1$, il existe $G \in E_R$ telle que $\forall z \in D_R$, $(z - z_{p+1})G(z) = F_1(z)(r^2 - \bar{z}_{p+1} z)$

En multipliant la relation de récurrence par $(r^2 - \bar{z}_{p+1} z)$ et compte tenu de l'égalité qui précède, on obtient :

$\forall z \in D_R$, $(z - z_{p+1})G(z)\displaystyle\prod_{j=1}^{p}(z - z_j) = f(z)\prod_{j=1}^{p+1}(r^2 - \bar{z}_j z)$, ce qui montre $\mathbf{Q}_{p+1}$ puisque $F_2(z) = (z - z_{p+1})G(z)$ est une série entière de rayon $\geq R$.

II.D.2) Soit $z\in C_R$ - $\{z_j\}$, $\left|\dfrac{r^2-\bar{z}_j z}{z-z_j}\right|^2 = \left(\dfrac{r^2-\bar{z}_j z}{z-z_j}\right)\left(\dfrac{r^2-z_j\bar{z}}{\bar{z}-\bar{z}_j}\right) = \dfrac{r^4-r^2(\bar{z}_j z+z_j\bar{z})+\left|z_j z\right|^2}{z\bar{z}-z_j\bar{z}-\bar{z}_j z+z_j\bar{z}_j}$

compte tenu de ce que $|z| = r$,

$$\left|\frac{r^2-\bar{z}_j z}{z-z_j}\right|^2 = \frac{r^4-r^2(\bar{z}_j z+z_j\bar{z})+r^2\left|z_j\right|^2}{r^2-z_j\bar{z}-\bar{z}_j z+\left|z_j\right|^2} = r^2$$

Ainsi, $\left|\dfrac{r^2-\bar{z}_j z}{z-z_j}\right| = r$

II.D.3) • Lorsque $z\in C_R$ - $\{ z_1, z_2, \dots , z_p \}$, $F(z) = \underbrace{\prod_{j=1}^{p}\left(\dfrac{r^2-\bar{z}_j z}{z-z_j}\right)}_{\text{module } = r^p} f(z)$

Par continuité de F, $\sup\limits_{z\in C_R} |F(z)| = \sup\limits_{z\in C_R-\{z_1,z_2,\dots,z_p\}} |F(z)|$. Il en va de même pour f.

(cette égalité n'est pas vraie pour le Max, $\operatorname{Max}\limits_{z\in C_R-\{z_1,z_2,\dots,z_p\}} |F(z)|$ pouvant ne pas être défini)

Donc $M_F(r) = \sup\limits_{z\in C_R-\{z_1,z_2,\dots,z_p\}} |F(z)| = \sup\limits_{z\in C_R-\{z_1,z_2,\dots,z_p\}} r^p |f(z)| = r^p M_f(r)$

• II.B.3) appliquée à F en $\omega = 0$ donne : $|F(0)| \leq M_F(r) = r^p M_f(r)$

et d'après II.D1), $F(0)\prod\limits_{j=1}^{p}(-z_j) = f(0)\, r^{2p}$

donc $|f(0)|\dfrac{r^{2p}}{\prod\limits_{j=1}^{p}\left|z_j\right|} \leq r^p M_f(r)$ d'où il vient que $M_f(r)\prod\limits_{j=1}^{p}\left|z_j\right| \geq |f(0)|\, r^p$

II.D.4) • Si $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-1)}(0)$, alors $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$.

Dans ce cas $f(z) = z^k\, [a_k + a_{k+1} z + a_{k+2} z^2 + \dots + a_{k+j} z^j + \dots]$

Posons $G(z) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} a_{k+j} z^j$ de sorte que $f(z) = z^k\, G(z)$

Pour $z \neq 0$, $f(z) = 0 \Leftrightarrow G(z) = 0$. G et f ont donc les mêmes zéros sur $\overline{D}_r$ - $\{0\}$.

En appliquant II.D.3) à G, $M_G(r)\prod\limits_{j=1}^{p}\left|z_j\right| \geq |G(0)|\, r^p$

• $\forall z\in D_R$, $|f(z)| = |z|^k\, |G(z)|$ et donc $M_f(r) = r^k M_G(r)$

• $G(0) = a_k = f^{(k)}(0)/k!$

En reportant ces deux dernières relations dans la première, $\dfrac{M_f(r)}{r^k}\prod\limits_{j=1}^{p}\left|z_j\right| \geq \dfrac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!} r^p$,

ce qui donne bien $M_f(r)\prod\limits_{j=1}^{p}\left|z_j\right| \geq \dfrac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!} r^{p+k}$

II.E) Si $f \neq 0$, $\exists i\in \mathbf{N}$, $a_i = \dfrac{f^{(i)}(0)}{i!} \neq 0$ (sinon, $f(z) = \sum 0 z^n = 0$)

Soit $k = \min\{ i\in \mathbf{N},\ a_i \neq 0 \}$ ($f(z) = a_k z^k + \dots$)

• Soit $p\in \mathbf{N}$, quelconque. Posons $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, ... , $z_p = p$, et prenons $r = p$ (on a bien $z_j\in \overline{D}_r$ - $\{0\}$)

d'après II.D.4), $|M_f(p)|\, p! \geq \dfrac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!}\, p^{p+k}$ donc $|M_f(p)| \geq \alpha \dfrac{p^{p+k}}{p!}$ où α est indépendant de p.

alors, en utilisant la formule de Stirling pour $p!$,

$$\frac{\left|M_f(p)\right|}{c^p} \geq \alpha \frac{p^{p+k}}{c^p\, p!} \underset{p\to+\infty}{\approx} \alpha \frac{p^k e^p}{c^p \sqrt{2\pi p}} \underset{p\to+\infty}{\approx} \alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e}{c}\right)^p p^{k-1/2} \quad \text{(car } c < e\text{)}$$

$\to +\infty$ quand $p \to +\infty$

Ceci est incompatible avec l'hypothèse $M_f(r) = O(c^r)$ c'est à dire que $\dfrac{\left|M_f(p)\right|}{c^p}$ est borné qd $p \to +\infty$

Donc $f = 0$.

Partie III - Théorème de Polya

III.A.1) $F_n = \dfrac{n!}{X(X-1)...(X-n)}$ admet une décomposition de la forme

$$F_n = \frac{\lambda_0}{X} + \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_2}{X-2} + ... + \frac{\lambda_n}{X-n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_j}{X-j}$$

En multipliant par $(X-j)$ et en spécialisant X par j, on obtient : $\lambda_j = \dfrac{n!}{j(j-1)...2..1.1.2...(j-1-n)(j-n)}$

$$\lambda_j = \frac{n!}{j!.(-1)^{n-j}(n-j)!} = (-1)^{n-j} C_n^j$$

Ainsi, $F_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j} C_n^j}{X-j}$

III.A.2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{n!\, f(re^{it})}{(re^{it}-1)...(re^{it}-n)} \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n!\, re^{it} f(re^{it})}{re^{it}(re^{it}-1)...(re^{it}-n)} \frac{dt}{2\pi}$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j} C_n^j}{re^{it}-j} \right) re^{it} f(re^{it}) \frac{dt}{2\pi} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} C_n^j \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it} f(re^{it})}{re^{it}-j} \frac{dt}{2\pi}$$

Or, d'après II-A-2), $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it} f(re^{it})}{re^{it}-j} \frac{dt}{2\pi} = f(j)$

donc, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{n!\, f(re^{it})}{(re^{it}-1)...(re^{it}-n)} \frac{dt}{2\pi} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} C_n^j f(j)$

III.A.3) pour tout r, tout k et tout t,

$$|re^{it}-k|^2 = (re^{it}-k)(re^{-it}-k) = r^2 - r\,k\,(e^{-it}+e^{it}) + k^2 = r^2 - 2\,k\,r\cos(t) + k^2 \geq r^2 - 2\,k\,r + k^2 = (r-k)^2$$

donc $|re^{it}-k| \geq |r-k|$ et $\dfrac{1}{\left|re^{it}-k\right|} \leq \dfrac{1}{|r-k|}$

d'après la question qui précède, $\displaystyle\left|\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} C_n^j f(j)\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{n!\, f(re^{it})}{(re^{it}-1)...(re^{it}-n)} \frac{dt}{2\pi}\right|$

$$\left|\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} C_n^j f(j)\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{n!\, f(re^{it})}{(re^{it}-1)...(re^{it}-n)}\right| \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n!\left|f(re^{it})\right|}{\left|re^{it}-1\right|....\left|re^{it}-n\right|} \frac{dt}{2\pi}$$

$$\left|\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} C_n^j f(j)\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n!\, M_f(r)}{|r-1|....|r-n|} \frac{dt}{2\pi}$$

et, puisque $r > n$, pour tout $k = 1,2,...,n$, $|r-k| = (r-k)$

$$\left|\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}C_n^j f(j)\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{n!M_f(r)}{(r-1).....(r-n)}}_{\text{fonction constante}}\frac{dt}{2\pi} = \frac{n!M_f(r)}{(r-1).....(r-n)}$$

III.B.1) Soit $n\in\mathbf{N}^*$ et appliquons III.A.3) à $r = 2n+1$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(k)\right| \leq \frac{n!M_f(2n+1)}{2n.(2n-1).....(n+1)} = \frac{(n!)^2 M_f(2n+1)}{(2n)!}$$

d'après l'hypothèse b) $M_f(2n+1) = \mathrm{o}\left(\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}}\right)$

en utilisant la formule de Stirling, $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, on obtient :

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(k)\right| = \mathrm{o}\left(\frac{2\pi n.n^{2n}}{e^{2n}}\frac{e^{2n}}{(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}}\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}}\right)$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(k)\right| = \mathrm{o}\left(\frac{2\pi n.}{\sqrt{\pi n}\sqrt{2n+1}}\right) = \mathrm{o}\left(\sqrt{2\pi}.\right) = \mathrm{o}(1)$$

autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(k)\right| = 0$

Or chaque $f(k)$ est entier par l'hypothèse a) ($f(\mathbf{N}) \subset \mathbf{Z}$), donc pour tout n, $\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(k)\right)\in\mathbf{Z}$.

Une suite (v_n) d'éléments de $\mathbf{Z}$, de limite nulle, est nécessairement nulle à partir d'un certain rang.

(Pour $\varepsilon = ½$, $\exists n_0\in\mathbf{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|v_n| < ½$ donc $v_n = 0$)

Donc $\exists n_0\in\mathbf{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(k) = 0$.

III.B.2) d'après I.D), il existe un polynôme P de $\mathbf{C}[X]$ (de degré $\leq n_0$) tel que $\forall j\in\mathbf{N}, f(j) = P(j)$

Considérons la fonction $g = f - P$; elle est nulle sur $\mathbf{N}$.

$M_g(r) \leq M_f(r) + M_P(r) = \mathrm{o}(2^r)$ puisque $M_f(r) = \mathrm{o}\left(\frac{2^r}{\sqrt{r}}\right) = \mathrm{o}(2^r)$ et $M_P(r) = \mathrm{o}(2^r)$

(P polynôme a une croissance à l'infini inférieure à toute fonction exponentielle)

d'après II.E), il s'ensuit que $g = 0$

Donc $f = P$ et f est une fonction polynomiale.

JMD *Septembre 2003*