Concours Commun Polytechnique

Epreuve de Mathématiques 1 option MP

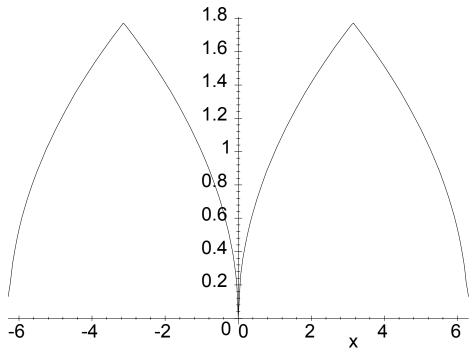
A propos de l'hypothèse " de classe C^1 par morceaux" du théorème de convergence normale d'une série de Fourier...

Partie I . Résultats préliminaires

I.1.a Le théorème de Dirichlet énonce que si la fonction f est de classe C^1 par morceaux, et continue par morceaux, alors la suite $(S_p(f))_{p\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\widetilde{f}$: $x \longmapsto \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

I.1.b Si l'on suppose la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$. Réciproquement si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors d'après le théorème de convergence normale rappelé dans l'énoncé, la convergence vers f est bien uniforme puisque la convergence normale entraîne la convergence uniforme.

I.2 La fonction $\varphi : x \longmapsto \sqrt{x}$ si $x \in [0,\pi]$, paire et 2π périodique admet le graphe suivant:



φ est continue sur $\mathbb{R}$ puisque $\lim\limits_{x\to\pi^+}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\pi^+}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to\pi^-}\varphi(x) = \varphi(\pi)$.φ dérivable sur $\mathbb{R}-\pi\mathbb{Z}$, mais n'est pas de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, car $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi'(x) = +\infty$.

I.3.a La suite $u_n - l$ converge vers 0, donc en posant $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1$, on a

$$0 \leq |u_n - l| = o(v_n)$$

D'après le théorème de sommation des relations de comparaison pour les séries à termes positifs , puisque $\sum v_n$ est une série **divergente**, on obtient:

$$\sum_{k=0}^{n} |u_k - l| = o(n+1)$$

Or $\sum_{k=0}^{n} |(u_k - l)| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k - l|$. On en déduit le résultat demandé.

I.3.b En reformulant le résultat précédent à l'aide des limites :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n}(u_k - l)}{n+1} = 0 = \lim_{n\to\infty} (\frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n+1}) - l$$

I.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π périodique telle que la suite des sommes partielles $S_n(f)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Celà signifie que pour x fixé dans $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f)(x)$ existe dans $\mathbb{C}$: notons $L(x)$ cette limite.
D'après la question I.3.b, pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=0}^n S_k(f)(x)}{n+1} = L(x)$.
D'autre part , d'après le théorème de Fejer, les sommes de Fejer de rang n : $\sigma_n(f) = \dfrac{\sum_{k=0}^n S_k(f)}{n+1}$ convergent uniformément, donc simplement, sur $\mathbb{R}$, vers la fonction f.
Par unicité de la limite , on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $L(x) = f(x)$.
I.5 Soit u_n une suite de réels positifs convergente vers 0. Posons pour tout entier n,

$$d_n = \sup(u_k, k \geq n)$$

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ceci entraîne l'existence de d_n pour tout entier naturel n
- Par définition , $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq d_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n+1$, $u_k \leq d_n$
  Donc
  $$d_{n+1} = \sup(u_k, k \geq n+1) \leq d_n$$
  la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
- Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que pour $k \geq N$, $0 \leq u_k \leq \varepsilon$. On en déduit alors $d_N = \sup(u_k, k \geq N) \leq \varepsilon$, puis pour $n \geq N$, $0 \leq d_n \leq d_N \leq \varepsilon$
  la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers 0.

Partie II. Un exemple de Série de Fourier divergente (en un point)
II.6 $\forall x \in [0,\pi], \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin\left[(2^{n^3}+1)\frac{x}{2}\right]$. On a $\sup\limits_{x\in[0,\pi]} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$, donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalent sur $[0,\pi]$.
II.7.a Soient p, k deux entiers.

$$I_{p,k} = \int_0^\pi \cos(pt)\sin(\frac{2k+1}{2}t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\sin(pt + \frac{2k+1}{2}t) + \sin(-pt + \frac{2k+1}{2}t)]dt$$

$$I_{p,k} = \frac{-1}{2}[\frac{\cos(pt + \frac{2k+1}{2}t)}{p+k+\frac{1}{2}} + \frac{\cos(-pt + \frac{2k+1}{2}t)}{-p+k+\frac{1}{2}}]_0^\pi = \frac{1}{2}[\frac{1}{p+k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{-p+k+\frac{1}{2}}]$$

II.7.b

$$T_{q,k} = \sum_{p=0}^q I_{p,k} = \sum_{p=0}^q \frac{1}{2(p+k)+1} + \frac{1}{2(-p+k)+1} = (\sum_{j=k-q}^{k+q} \frac{1}{2j+1}) + \frac{1}{2k+1}$$

On posera $c_k = \frac{1}{2k+1}$
si $0 \leq q \leq k$, $k - q \geq 0$ donc $T_{q,k}$ est la somme de termes tous positifs
si $0 \leq k < q$,

$$T_{q,k} = \frac{1}{2k+1} + \sum_{j=1}^{q-k} \frac{1}{1-2j} + \sum_{j=1}^{k+q+1} \frac{1}{2j-1} = c_k + \sum_{j=1}^{q-k}(\frac{1}{1-2j} + \frac{1}{2j-1}) + \sum_{j=q-k+1}^{k+q+1} \frac{1}{2j-1} \geq 0$$

II.7.c On sait que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim_{n\to\infty} \ln(n)$, et que la série $\sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1}$ diverge ,donc $\sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \sim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\ln(N)$

II.7.d Puisque $c_k \rightarrow_{k\to\infty} 0$ et $\sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{2j+1} \to \infty$, on peut écrire

$$T_{k,k} = c_k + \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{2j+1} \sim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{2j+1} \sim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\ln(k)$$

II.8 $a_p(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(pt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{n\geq 1} f_n(t)\cos(pt)dt$

la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(t)\cos(pt)$ est normalement convergente sur $[0,\pi]$ on peut donc permuter intégrale et série:

$$a_p(f) = \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}\sin\left[(2^{n^3}+1)\frac{t}{2}\right]\cos(pt)dt = \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} I_{p,2^{n^3-1}}$$

II.9

$$S_{2^{p^3-1}}(f)(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{2^{p^3-1}} a_n\cos(nt) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{2^{p^3-1}}\left(\frac{2}{\pi}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}I_{n,2^{q^3-1}}\right)\cos(nt)$$

donc:

$$S_{2^{p^3-1}}(f)(0) = -\frac{a_0(f)}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{2^{p^3-1}}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}I_{n,2^{q^3-1}} = -\frac{a_0(f)}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}\sum_{n=0}^{2^{p^3-1}} I_{n,2^{q^3-1}}$$

(la permutation des $\sum$ est autorisée puisque n varie dans un ensemble fini)

$$S_{2^{p^3-1}}(f)(0) = -\frac{a_0(f)}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}T_{2^{p^3-1},2^{q^3-1}} \geq -\frac{a_0(f)}{2} + \frac{2}{\pi p^2}T_{2^{p^3-1},2^{p^3-1}}$$

(on a isolé le terme d'indice p de la série $\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}T_{2^{p^3-1},2^{q^3-1}}$, les autres sont tous positifs)
On en déduit donc puisque

$$\frac{2}{\pi p^2}T_{2^{p^3-1},2^{p^3-1}} \sim_{p\to\infty} \frac{2}{\pi p^2}\frac{1}{2}\ln(2^{p^3-1}) \sim_{p\to\infty} \frac{2}{\pi p^2}\frac{1}{2}\ln(2^{p^3}) = \frac{p^3\ln(2)}{\pi p^2}$$

que $\lim\limits_{p\to\infty} S_{2^{p^3-1}}(f)(0) = +\infty$. Il existe donc une suite extraite de la suite $(S_n(f)(0))_{n\in\mathbb{N}}$ qui diverge , ce qui entraine la divergence de cette suite.

Partie III Fonction à variation bornée. Théorème de Jordan

III.10 La fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x\cos(\frac{\pi}{2x})$ si $x \neq 0$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, elle est donc continue en 0. Posons $x_k = \frac{1}{2(n+1-k)}$ pour $1 \leq k \leq n$, et $x_0 = 0, x_{n+1} = 1$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}|f(x_{i+1}) - f(x_i)| &= \sum_{i=1}^{n-1}\left|\tfrac{1}{2(n-i)}\cos(\pi(n-i)) - \tfrac{1}{2(n-i+1)}\cos(\pi(n-i+1))\right| + |f(x_1)| + |f(x_n)| \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\left|\frac{1}{2(n-i)}(-1)^{n-i} - \frac{1}{2(n-i+1)}(-1)^{n-i+1}\right| + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2}((1+\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}) + 1 + \frac{1}{n})
\end{aligned}$$

Finalement si l'on note σ la subdivision $(x_k)_{0\leq k\leq n+1}, V(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$

On en déduit que la fonction f n'est pas à variation bornée puisqu'il n'existe aucune constante M qui majore toutes les sommes $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$: en effet $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = +\infty$.

III.11 Exemple généraux

III.11.a Si la fonction f est monotone sur $[a,b]$ alors pour toute subdivision σ de $[a,b]$,

$$V(\sigma,f)=\pm\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})-f(x_i)=|f(b)-f(a)|$$

$V(\sigma,f)$ est constante, donc bornée. Donc $V([a,b],f)=|f(b)-f(a)|$

III.11.b Si $f=g+h$ où g et h sont à variations bornées , alors

$$V(\sigma,f)\le V(\sigma,g)+V(\sigma,h)=|g(b)-g(a)|+|h(b)-h(a)|$$

d'ou

$$V([a,b],g+h)\le|g(b)-g(a)|+|h(b)-h(a)|$$

III.11.c Si f est continue et de classe C^1 par morceaux sur $[a,b]$, notons $(a_i)_{0\le i\le p}$ une subdivision de $[a,b]$ telle que f soit C^1 sur chacun des intervalles $[a_i,a_{i+1}]$. Soit $\sigma=(x_i)_{0\le i\le n}$ une subdivision de $[a,b]$. Notons $\sigma_1=(y_j)_{0\le j\le N}$ la subdivision obtenue en intercalant les points a_i dans la subdivision σ. On obtient immédiatement $V(\sigma,f)\le V(\sigma_1,f)$ grâce à l'inégalité triangulaire.

Notons $M_i=\sup\limits_{x\in[a_i,a_{i+1}]}|f'(x)|$ et $M=\max\limits_{0\le i\le p-1}M_i$. On applique l'inégalité des accroissements finis sur chacun des intervalles de la subdivision σ_1

$$V(\sigma_1,f)=\sum_{j=0}^{N-1}|f(y_{j+1})-f(y_j)|\le\sum_{j=0}^{N-1}M(y_{j+1}-y_j)=M(b-a)$$

Donc f est bien à variations bornée.

III.12 Considérons une subdivision de $[a,c],\sigma=(x_i)_{0\le i\le n}$ et une subdivision de $[c,b],\sigma'=(y_j)_{0\le j\le N}$

$(x_i)\cup(y_j)$ est alors une subdivision de $[a,b]$ donc

$$\sum_{\substack{i=0\\x_i\in\sigma}}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|+\sum_{\substack{j=0\\y_j\in\sigma'}}^{N-1}|f(y_{j+1})-f(y_j)|\le V([a,b],f)\tag{1}$$

donc $V(\sigma,f)\le V([a,b],f)$ et $V(\sigma',f)\le V([a,b],f)$

Par définition f est donc à variation bornée sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$.

On en déduit en passant au sup sur σ, puis sur σ' dans (1) que

$$V([a,c],f)+V([c,b],f)\le V([a,b],f)$$

III.13.a

$$\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(t)-f(x_k))e^{-int}dt\right|\le\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(t)-f(x_k)|\,dt$$

or si $t\in[x_{k-1},x_k]$, on peut écrire $|f(t)-f(x_k)|\le V([x_{k-1},t],f)\le V([x_{k-1},x_k],f)$

donc

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(t)-f(x_k)|\,dt\le V_k(f)(x_k-x_{k-1})$$

III.13.b

$$\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_k)e^{-int}dt\right|=\left|\sum_{k=1}^{|n|N}f(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}e^{-int}dt\right|=\left|\sum_{k=1}^{|n|N}f(x_k)\frac{1}{in}(e^{-inx_k}-e^{-inx_{k-1}})\right|$$

on peut donc effectuer une réindexation (transformation d'Abel)

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)e^{-int}dt\right| &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)\frac{1}{in}e^{-inx_k} - \sum_{k=0}^{|n|N-1} f(x_{k+1})e^{-inx_k}\right| \\ &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{|n|N-1}(f(x_k)-f(x_{k+1}))e^{-inx_k} + f(2\pi)e^{-2\pi in} - f(0)\right|\end{aligned}$$

or f est 2π périodique donc

$$\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)e^{-int}dt\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{|n|N-1}|f(x_k)-f(x_{k+1})| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{|n|N-1}|f(x_k)-f(x_{k+1})| \leq \frac{1}{n}V([0,2\pi],f)$$

III.13.c On en déduit que **,** pour la subdivision σ considérée

$$\begin{aligned}|c_n(f)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)e^{-int}dt\right| \\ |c_n(f)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(t)-f(x_k))e^{-int}dt + \sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)e^{-int}dt\right| \\ |c_n(f)| &\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(t)-f(x_k)| + \left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)e^{-int}dt\right| \\ |c_n(f)| &\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k-x_{k-1}) + \frac{1}{2\pi\,|n|}V([0,2\pi],f) \\ |c_n(f)| &\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)\frac{2\pi}{|n|\,N} + \frac{1}{2\pi\,|n|}V([0,2\pi],f) \\ |c_n(f)| &\leq \frac{V([0,2\pi],f)}{|n|\,N} + \frac{1}{2\pi\,|n|}V([0,2\pi],f) \text{ (d'après 12)}\end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie pour toute valeur de l'entier N. On peut passer à la limite pour $N \to \infty$ on obtient alors

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi\,|n|}V([0,2\pi],f)$$

III.14.a Posons $X = k(S_n - L) - (n+k)(\sigma_{n+k-1} - L) + n(\sigma_{n-1} - L)$

$$\begin{aligned}X &= k(S_n-L) - (n+k)\left[\frac{1}{n+k}\left(\sum_{p=0}^{n+k-1} S_p\right) - L\right] + n\left(\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} S_p - L\right) \\ X &= kS_n - \sum_{p=0}^{n+k-1} S_p + \sum_{p=0}^{n-1} S_p = kS_n - \sum_{p=n}^{n+k-1} S_p = \sum_{p=n}^{n+k-1}(S_n - S_p) \\ X &= u_{n+1} + (u_{n+2}+u_{n+1}) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (u_{n+k-1} + \ldots + u_{n+1})\end{aligned}$$

III.14.b $|k(S_n - L)| = |X + (n+k)(\sigma_{n+k-1} - L) - n(\sigma_{n-1} - L)|$

d’après la question 14a

$$X \leq \frac{A}{n+2} + \frac{2A}{n+2} + ... + \frac{(k-1)A}{n+2} = \frac{Ak(k-1)}{2(n+2)}$$

Donc puisque la suite d_n est décroissante

$$|k(S_n - L)| \leq \frac{Ak(k-1)}{2(n+2)} + (n+k)d_{n+k-1} + nd_{n-1} \leq \frac{Ak(k-1)}{2(n+2)} + (2n+k)d_{n-1}$$

soit

$$|(S_n - L)| \leq \frac{A(k-1)}{2(n+2)} + (\frac{2n}{k} + 1)d_{n-1}$$

III.14.c On suppose que $(k-1)^2 \leq 4n^2 d_{n-1} < k^2$
d’ou $\sqrt{d_{n-1}} < \frac{k}{2n}$ donc

$$d_{n-1}(\frac{2n}{k} + 1) < d_{n-1} + \sqrt{d_{n-1}}$$

D’autre part

$$\frac{A(k-1)}{2(n+2)} \leq \frac{An\sqrt{d_{n-1}}}{n+2} \leq A\sqrt{d_{n-1}}$$

En regroupant on obtient $|(S_n - L)| \leq d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}}$
On en déduit que la suite S_n converge vers L puisque la suite d_n converge vers 0.
III.15 Soit alors f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, 2π périodique et à variation bornée sur $[0, 2\pi]$. On a d’après 13: $|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi|n|}V([0, 2\pi], f)$

Pour tout réel x on a $S_n(f) = a_0(f)/2 + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)$
posons $u_0 = a_0(f)/2$ et pour tout entier k : $u_k = a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)$
On a $|u_k| \leq |a_k(f)| + |b_k(f)| \leq 2(|c_k(f)| + |c_{-k}(f)|)$ pour $k \geq 1$
donc, puisque f est à variation bornée, pour tout $k \geq 1, |u_k| \leq \frac{2}{\pi k}V([0, 2\pi], f) \leq \frac{M}{k+1}$ avec $M = \frac{4}{\pi}V([0, 2\pi], f)$. Posons $M' = |a_0(f)/2|$;on a alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, |u_k| \leq \frac{\max(M, M')}{k+1}$$

On sait d’après le théorème de Fejer que la suite de fonctions $\sigma_n(f)$ converge uniformément vers la fonction f. La suite $\sigma_n(f)(x)$ converge donc vers $f(x)$ et les hypothèses de la question 14 sont réalisées.
D’autre part d’après la question 5 il est effectivement possible de construire une suite d_n décroissante qui majore $|\sigma_n(f)(x) - f(x)|$ puisque cette suite converge vers 0.
On peut même faire mieux puisque $v_n = \sup\limits_{x \in [0, 2\pi]} |\sigma_n(f)(x) - f(x)| \to 0$, on peut choisir $v_n \leq d_n$ et donc d_n indépendante de x
On en déduit que

$$|S_n(f)(x) - f(x)| \leq d_{n-1} + (1 + \max(M, M'))\sqrt{d_{n-1}}$$

ceci traduit que la suite de fonctions $S_n(f)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.
16 la fonction φ de la question 2 peut s’écrire sur $[0, 2\pi]$ comme somme d’une fonction croissante et d’une fonction décroissante: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ avec $\varphi_1(x) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \varphi(x) \text{ si } x \in [0, \pi] \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ si } x \in]\pi, 2\pi] \end{cases}$

et $\varphi_2(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ si } x \in [0, \pi] \\ -\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \varphi(x) \text{ si } x \in]\pi, 2\pi] \end{cases}$

donc d’apres 11.b φ est à variation bornée sur $[-\pi, \pi]$ donc on peut appliquer le résultat de 15

(Rem : pour trouver φ_1 et φ_2, on a posé à priori $\varphi_1(x) = \left\{ \begin{array}{c} -\alpha + \varphi(x) \text{ si } x \in [0, \pi] \\ \beta \text{ si } x \in]\pi, 2\pi] \end{array} \right.$ et $\varphi_2(x) = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \text{ si } x \in [0, \pi] \\ -\beta + \varphi(x) \text{ si } x \in]\pi, 2\pi] \end{array} \right.$ puis ajusté α et β pour que ces deux fonctions soient continues en π : $\beta = -\alpha + \sqrt{\pi}$)

17 Toute fonction lipchitzienne sur $[0, 2\pi]$ de rapport k est à varaiation bornée et $V([0, 2\pi], f) \leq 2\pi k$ en revenant à la définition de la variation totale d'une fonction . Elle vérifie donc les hypothèses de 15