EPREUVE OPTIONNELLE de MATHEMATIQUES
CORRIGE

1.

a) classique

b) $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \ldots$

2.

a) Immédiat si $n \geq 2$ $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ et $F_{n-1} > 0$ $(n-1 \geq 1)$

b) Les suites géométriques vérifiant la relation $(u_{n+2} = u_{n+1} + u_n)$ sont les suites

$$\left(\lambda\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(\mu\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

c) On trouve $\underline{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$

d) Immédiat car $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$

e) la fonction génératrice est donc définie pour $|x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

et un calcul de série géométrique donne :

$$\underline{F^{(n)} = \frac{x}{1-x-x^2}}$$

3. a) Les diviseurs de $a \geq 1$ et 0 sont évidemment les diviseurs de *a* et $PGCD\left(a,0\right) = a$.

b) Si $a = bq + r$, tout diviseur de a et b divise b et r car $r = a - bq$, et inversement, tout diviseur de b et r divise a et b car $a = bq + r$.

Donc $D\left(a,b\right) = D\left(b,r\right)$ et $PGCD\left(a,b\right) = PGCD\left(b,r\right)$.

c) En particulier, $PGCD\left(F_{k+2}, F_{k+1}\right) = PGCD\left(F_{k+1}, F_k\right)$
car $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$.

Par récurrence, on a donc $PGCD\left(F_{n+1}, F_n\right) = PGCD\left(F_1, F_0\right)$, et comme
$F_1 = 1, \quad F_0 = 0,$ ce $PGCD$ vaut 1.
Deux nombres de Fibonacci consécutifs sont donc premiers entre eux.

4. Comme $F_2 = 1, \quad F_3 = 2$: $\left|F_3 = 2F_2 + 0\right.$

Comme $F_3 = 2, \; F_4 = 3$:

$$\begin{array}{|ll} F_4 = F_3 + F_2 & \left(0 \leq F_2 < F_3\right) \\ F_3 = 2F_2 + 0 & \end{array}$$

De même, on vérifie :

$$\begin{array}{|ll} F_{12} = F_{11} + F_{10} & (0 \leq F_{10} < F_{11}) \\ F_{11} = F_{10} + F_9 & (0 \leq F_9 < F_{10}) \\ \vdots & \vdots \\ F_4 = F_3 + F_2 & \left(0 \leq F_2 < F_3\right) \\ F_3 = 2F_2 + 0 & \end{array}$$

En fait, pour $n \geq 2$, l'écriture $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ est la division euclidienne de F_{n+2} par

F_{n+1} car $F_n < F_{n+1}$.

Pour F_{n+2} et F_{n+1} , l'algorithme d'Euclide s'effectue donc en n divisions.

5. a) La propriété établie $PGCD\left(a,b\right) = PGCD\left(b,q\right)$ pour $a = bq + r$ montre que :

$$PGCD\left(a,b\right) = PGCD\left(a_0, a_1\right) = PGCD\left(a_1, a_2\right) = 5$$

$$5 \;= PGCD\left(a_{n+1}, \underbrace{a_{n+2}}_{=0} \right) = a_{n+1}$$

Le $PGCD$ est bien le dernier reste non nul.

b) On a $q_1 \geq 1$ (sinon $q_1 = 0$ et $a_0 = a_2$, alors qu'on a $a_2 < a_1 = b < a_0 = a$).

De même, tous les q_i sont ≥ 1.

Par ailleurs,

$$a_{n+2} = 0 = F_0$$

$$a_{n+1} \geq 1 = F_1$$

Puis $a_n = q_{n+1} \; a_{n+1} + a_{n+2} \geq a_{n+1} + a_{n+2}$

$$\geq F_1 + F_0 = F_2$$

De même, $a_k \geq F_{n+2-k}$ par récurrence immédiate.

c) Si l'algorithme d'Euclide s'effectue en $n+1$ divisions, on a donc :

$$a = a_0 \geq F_{n+2} \quad \text{et} \quad b = a_1 \geq F_{n+1} \quad .$$

D'après 2° (encadrement de F_n), on a donc :

$$b \geq F_{n+1} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - 1 \right)$$

d) Comme $b < 10^p$ on a : $10^p \geq b+1 > b + \frac{1}{\sqrt{5}} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n$

En passant au logarithme :

$$p \ln 10 \geq n \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \ln \sqrt{5}$$

Et on en tire $n \geq \left(p \ln 10 + \ln \sqrt{5}\right) \Big/ \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

et $n + 1 \geq 5p + 2$.

5. C’est classique. Par exemple, avec $0 \leq b < a$ au départ.

Tant que $b \neq 0$, faire $\left| \begin{array}{l} r := a \bmod b; \\ a := b; \\ b := r; \end{array} \right.$

Sortir a ;