ÉPREUVE OPTIONNELLE de MATHÉMATIQUES

Dans ce problème, on note $D(a,b)$ l'ensemble des diviseurs communs à deux entiers naturels a, b où $(a,b)\neq(0,0)$, et le plus grand élément de cet ensemble $D(a,b)$ est donc le PGCD de a et b. Le problème a pour but l'étude de la complexité du calcul du PGCD des entiers naturels a et b par l'algorithme d'Euclide décrit ci-dessous. On étudie à titre préliminaire la suite de Fibonacci, qui est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1°) Dans cette question, on étudie le calcul de la suite de Fibonacci (F_n).

a) Écrire un algorithme de calcul de F_n lorsque le nombre entier n est donné.

b) Préciser F_n pour $n \leqslant 12$.

2°) Dans cette question, on étudie les propriétés de la suite de Fibonacci (F_n).

a) Prouver que (F_n) est une suite de nombres entiers naturels, strictement croissante pour $n \geqslant 2$.

b) Déterminer les suites géométriques (u_n) vérifiant la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

c) Déterminer l'expression du terme général F_n de la suite de Fibonacci en fonction de n.

d) En déduire l'encadrement suivant de F_n, puis un équivalent de F_n lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - 1\right) \leqslant F_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + 1\right).$$

e) Déterminer le domaine de définition et la somme de la fonction génératrice :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n.$$

3°) Dans cette question, on étudie quelques propriétés de l'ensemble $D(a,b)$.

a) Quels sont les éléments de $D(a,0)$ et le PGCD de a et de 0 pour $a \geqslant 1$?

b) Montrer, si $a = bq + r$, que $D(a,b) = D(b,r)$ et $\mathrm{PGCD}\,(a,b) = \mathrm{PGCD}\,(b,r)$.

c) En remarquant que $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, en déduire le PGCD de F_{n+1} et de F_n pour $n \in \mathbb{N}$.

On considère deux nombres entiers naturels a et b tels que $a > b > 0$. On rappelle qu'une égalité de la forme $a = bq + r$ est la division euclidienne de a par b si q et r sont deux entiers naturels vérifiant $0 \leqslant r < b$, et que l'algorithme d'Euclide est la suite des divisions euclidiennes suivantes, poursuivies jusqu'à l'obtention d'un premier reste nul, et dans lesquelles $a_0 = a$ et $a_1 = b$:

$$\begin{array}{rcc}
a_0 = q_1 a_1 + a_2 & \text{avec} & 0 < a_2 < a_1 \\
a_1 = q_2 a_2 + a_3 & \text{avec} & 0 < a_3 < a_2 \\
\multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{n-1} = q_n a_n + a_{n+1} & \text{avec} & 0 < a_{n+1} < a_n \\
a_n = q_{n+1} a_{n+1} + a_{n+2} & \text{avec} & a_{n+2} = 0
\end{array}$$

On dit alors, plus précisément, que l'algorithme d'Euclide pour a et b s'effectue en $n+1$ divisions. L'ensemble de ces notations est désormais conservé jusqu'à la fin du problème.

4°) Dans cette question, on étudie un exemple d'application de l'algorithme d'Euclide.

a) Écrire l'algorithme d'Euclide pour F_3 et F_2, pour F_4 et F_3, pour F_5 et F_4.

b) Prouver que l'égalité $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ est la division euclidienne de F_{k+2} par F_{k+1} pour $k \geqslant 2$. En déduire que l'algorithme d'Euclide pour F_{n+2} et F_{n+1} s'effectue en n divisions pour $n \geqslant 1$.

5°) Dans cette question, on étudie enfin la complexité de l'algorithme d'Euclide (Théorème de Lamé).

a) Prouver que le PGCD de a et b est égal au dernier reste non nul a_{n+1}.

b) Prouver par récurrence les inégalités $q_k \geqslant 1$ pour $1 \leqslant k \leqslant n+1$ et $a_k \geqslant F_{n+2-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n+2$.

c) En déduire, si l'algorithme d'Euclide s'effectue en $n+1$ divisions, que $a \geqslant F_{n+2}$, $b \geqslant F_{n+1}$, et :

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - 1\right) \leqslant b.$$

d) En déduire, si l'écriture décimale de b compte p chiffres, autrement dit si $10^{p-1} \leqslant b < 10^p$, que le nombre $n+1$ de divisions de l'algorithme d'Euclide est majoré par $5p+2$.

6°) Écrire un algorithme itératif ou récursif calculant le PGCD de deux nombres entiers donnés a et b par cette méthode.