Corrigé de Mines-Ponts 2007 PC Première épreuve

I.

☐ 1- • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f_n : x \longmapsto \dfrac{\sin nx}{n^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est bornée et $||f_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$. Puisque $\alpha > 1$, d'après l'exemple de Riemann, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge. Par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} ||f_n||_\infty$ converge, donc la série d'applications $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

D'après un théorème du Cours (convergence normale et continuité pour une série d'applications), on conclut :

$$\boxed{S_\alpha \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

☐ 2- • Puisque $u \in]-1\,;1[$, on a : $\forall\, t \in]0\,;+\infty[, \quad \mathrm{e}^{\,t} - u > 1 - u > 0$, donc J est continue sur $]0\,;+\infty[$.

• En 0 : $J(t) \underset{t \longrightarrow 0}{\sim} \dfrac{1}{1-u} t^{\gamma-1} > 0$. D'après l'exemple de Riemann en 0, l'application $t \longmapsto t^{\gamma-1}$ est intégrable sur $]0\,;1]$ si et seulement si $\gamma > 0$. Par théorème d'équivalence pour des fonctions à valeurs réelles $\geqslant 0$, il en résulte que J est intégrable sur $]0\,;1]$ si et seulement si $\gamma > 0$.

• En $+\infty$: $t^2 J(t) = \dfrac{t^{\gamma+1}}{\mathrm{e}^{\,t} - u} \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, par prépondérance de l'exponentielle sur les puissances.

On a donc, pour t assez grand : $0 \leqslant \dfrac{t^{\gamma+1}}{\mathrm{e}^{\,t} - u} \leqslant 1$, d'où $0 \leqslant J(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$. D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ $(2 > 1)$ et le théorème de majoration pour des fonctions à valeurs réelles $\geqslant 0$, on déduit que J est intégrable sur $[1\,;+\infty[$, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$.

Finalement :

$$\boxed{J \text{ est intégrable sur }]0\,;+\infty[\text{ si et seulement si : } \gamma > 0.}$$

☐ 3- On a, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, par sommation géométrique et puisque $|u\,\mathrm{e}^{-t}| \leqslant |u| < 1$, donc $u\,\mathrm{e}^{-t} \neq 1$:

$$R_N(t,u) = \Big(\frac{u}{\mathrm{e}^{\,t} - u} - u\,\mathrm{e}^{-t}\frac{1-(u\,\mathrm{e}^{-t})^N}{1-u\,\mathrm{e}^{-t}}\Big)t^{\alpha-1} = \Big(\frac{u}{\mathrm{e}^{\,t} - u} - \frac{u(1-u^N\,\mathrm{e}^{-Nt})}{\mathrm{e}^{\,t} - u}\Big)t^{\alpha-1} = \frac{u^{N+1}\,\mathrm{e}^{-Nt}t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{\,t} - u}.$$

☐ 4- **1ère méthode :**

• Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $R_N(\cdot,u)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.

• La suite $\big(R_N(\cdot,u)\big)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers l'application nulle sur $]0\,;+\infty[$, car $|u| < 1$ et $t > 0$, donc $u^{N+1}\,\mathrm{e}^{-Nt} \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0$.

• L'application nulle est continue par morceaux (car continue) sur $]0\,;+\infty[$.

• D'après 2- : $\qquad \forall\, t \in]0\,;+\infty[, \quad \big|R_N(t,u)\big| = \dfrac{|u|^{N+1}\,\mathrm{e}^{-Nt}t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{\,t} - u} \leqslant \dfrac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{\,t} - u} = J(t),$

et J est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ d'après 2-, avec α à la place de γ.

D'après le théorème de convergence dominée, on conclut que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*, R_N(\cdot,u)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} R_N(t,u)\,\mathrm{d}t \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0.$

2ème méthode :

• Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$*$ L'application $R_N(\cdot, u)$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, d'après sa définition en 2-, ou d'après l'expression obtenue en 3-.

$*$ En 0 : $R_N(t,u) \underset{t \longrightarrow 0}{\sim} \dfrac{u^{N+1}}{1-u} t^{\alpha-1} \geqslant 0$, donc, d'après l'exemple de Riemann en 0 et le théorème d'équivalence pour des fonctions à valeurs réelles $\geqslant 0$, $R_N(\cdot, u)$ est intégrable à la borne 0.

$*$ En $+\infty$: $t^2 R_N(t,u) = \dfrac{u^{N+1}\,\mathrm{e}^{-Nt} t^{\alpha+1}}{\mathrm{e}^{t} - u} \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, comme en 3-, $R_N(\cdot, u)$ est intégrable à la borne $+\infty$.

Ainsi, $R_N(\cdot, u)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

• On a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$: $\quad |R_N(t,u)| = \dfrac{|u|^{N+1}\,\mathrm{e}^{-Nt} t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t} - u} \leqslant \dfrac{|u|^{N+1}}{1-u}\,\mathrm{e}^{-Nt} t^{\alpha-1}$,

donc :

$$\Big| \int_0^{+\infty} R_N(t,u)\,\mathrm{d}t \Big| \leqslant \int_0^{+\infty} |R_N(t,u)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{|u|^{N+1}}{1-u} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-Nt} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$$

$$\underset{[s=Nt]}{=} \frac{|u|^{N+1}}{1-u} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s} \Big(\frac{s}{N}\Big)^{\alpha-1} \frac{\mathrm{d}s}{N} = \frac{|u|^{N+1}}{1-u} \frac{1}{N^{\alpha}} \Gamma(\alpha) \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0,$$

car $|u| < 1$ (et $\alpha > 0$).

On conclut :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} R_N(t,u)\,\mathrm{d}t \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0}$$

☐ 5- • Le résultat de 2-, avec α à la place de γ, prouve que, pour tout $\alpha \in]0\,;+\infty[$, l'application $t \longmapsto \dfrac{u t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t} - u}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

• On a, en utilisant le développement en série entière géométrique et la définition de $R_N(t,u)$, pour tout $t \in]0\,;+\infty[$:

$$\frac{u t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t} - u} = \frac{u t^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-t}}{1 - u\,\mathrm{e}^{-t}} = u t^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{N-1} (u\,\mathrm{e}^{-t})^n + R_N(t,u).$$

Les applications en question étant toutes intégrables sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{u t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t} - u}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} u t^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-t} \Big(\sum_{n=0}^{N-1} (u\,\mathrm{e}^{-t})^n \Big)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} R_N(t,u)\,\mathrm{d}t$$

et :

$$\int_0^{+\infty} u t^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-t} \Big(\sum_{n=0}^{N-1} (u\,\mathrm{e}^{-t})^n \Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+1} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$$

$$\underset{[s=(n+1)t]}{=} \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+1} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s} \Big(\frac{s}{n+1}\Big)^{\alpha-1} \frac{\mathrm{d}s}{n+1}$$

$$= \Big(\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \Big) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{u^{n+1}}{(n+1)^{\alpha}} \underset{[n \longleftarrow n+1]}{=} \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{N} \frac{u^n}{n^{\alpha}}.$$

On a donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{ut^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{\,t}-u}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N} \Gamma(\alpha)\frac{u^n}{n^\alpha} + \int_0^{+\infty} R_N(t,u)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} R_N(t,u)\,\mathrm{d}t \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0$, il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\Gamma(\alpha)\frac{u^n}{n^\alpha}$ converge. De plus, comme $\Gamma(\alpha)\neq 0$ (car $\Gamma(\alpha)>0$), la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{u^n}{n^\alpha}$ converge, et on déduit, en faisant tendre l'entier N vers l'infini :

$$\boxed{\forall\,\alpha\in\,]0\,;+\infty[,\quad \int_0^{+\infty} \frac{ut^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{\,t}-u}\,\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^n}{n^\alpha}}$$

☐ 6- Soit $x\in\mathbb{R}-2\pi\mathbb{Z}$. Il existe alors $X\in\,]0\,;2\pi[$ et $k\in\mathbb{Z}$ tels que $x=X+2k\pi$.
On applique (2) à $u=\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X}$ (résultat admis dans l'énoncé) :

$$\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{\,t}-u}\,\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nX}}{n^\alpha}.$$

Comme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nX}}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nX}{n^\alpha} + \mathrm{i}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nX}{n^\alpha},$$

on a donc :

$$\Gamma(\alpha)S_\alpha(x) = \mathrm{Im}\Big(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X}t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{\,t}-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X}}\,\mathrm{d}t\Big) = \int_0^{+\infty}\mathrm{Im}\Big(\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X}t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{\,t}-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X}}\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\mathrm{Im}\Big(\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X}t^{\alpha-1}(\mathrm{e}^{\,t}-\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,X})}{(\mathrm{e}^{\,t}-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X})(\mathrm{e}^{\,t}-\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,X})}\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty}\mathrm{Im}\Big(\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X}t^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{\,t}-t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{\,2t}-2\cos X\,\mathrm{e}^{\,t}+1}\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\sin X t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{\,t}-2\cos X+\mathrm{e}^{\,-t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin X}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch}\,t-\cos X}\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, comme $\Gamma(\alpha)\neq 0$ (car $\Gamma(\alpha)>0$), et que $x\equiv X\quad[2\pi]$:

$$\boxed{S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha} = \frac{\sin x}{2\,\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch}\,t-\cos x}\,\mathrm{d}t}$$

☐ 7- Soit $M\in\,]0\,;+\infty[$.
On a, par utilisation d'une série géométrique :

$$\int_0^{M}\frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch}\,t-u}\,\mathrm{d}t = \int_0^{M}\frac{1}{\mathrm{ch}\,t}\frac{t^{\alpha-1}}{1-\dfrac{u}{\mathrm{ch}\,t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{M}t^{\alpha-1}\frac{1}{\mathrm{ch}\,t}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{u}{\mathrm{ch}\,t}\Big)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{M}\frac{1}{\mathrm{ch}\,t}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}u^n}{(\mathrm{ch}\,t)^n}\Big)\,\mathrm{d}t,$$

car $\left|\dfrac{u}{\mathrm{ch}\,t}\right|\leqslant |u|<1$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $g_n : t \longmapsto \dfrac{t^{\alpha-1}u^n}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}$ est intégrable sur $]0\,;M]$, car $\alpha > 0$.

• La série d'applications $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $]0\,;M]$.

• La somme de cette série d'applications, qui est l'application $t \longmapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u}$, est continue par morceaux (car continue) sur $]0\,;M]$.

• On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^M |g_n| = \int_0^M \Big|\frac{t^{\alpha-1}u^n}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\Big| \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^M t^{\alpha-1}|u|^n \,\mathrm{d}t = |u|^n \Big[\frac{t^\alpha}{\alpha}\Big]_0^M = \frac{|u|^n M^\alpha}{\alpha}.$$

Comme $|u| < 1$, la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |u|^n$ converge. Par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^M |g_n|$ converge.

D'après un théorème du Cours (convergence normale et intégration sur un intervalle quelconque), on déduit que l'application $t \longmapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u}$ est intégrable sur $]0\,;M]$ (ce que l'on pouvait aussi voir directement), que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^M g_n$ converge, et que l'on peut permuter intégrale et série, d'où le résultat voulu :

$$\boxed{\int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u} \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^M u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} \,\mathrm{d}t}$$

☐ 8- Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$h_n :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad M \longmapsto h_n(M) = \int_0^M u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} \,\mathrm{d}t.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $h_n(M) \underset{M \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} \,\mathrm{d}t$ car l'application $t \longmapsto u^n \dfrac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$, comme plus haut.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $M \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} |h_n(M)| = \Big|\int_0^M u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} \,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \int_0^M \Big|u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\Big| \,\mathrm{d}t = |u|^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} \,\mathrm{d}t \\ \leqslant |u|^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} \,\mathrm{d}t \leqslant |u|^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t} \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est bornée et que :

$$||h_n||_\infty \leqslant |u|^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t} \,\mathrm{d}t.$$

Comme $|u| < 1$, la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |u|^n$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} ||h_n||_\infty$ converge, donc la série d'applications $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} h_n$ converge normalement sur $]0\,;+\infty[$.

D'après un théorème du Cours (convergence normale et limite), on peut permuter limite et série, d'où :

$$\boxed{\lim_{M \longrightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t}$$

Il en résulte d'après 7- :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t}$$

☐ 9- Soit $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$. On applique 7- à $u = \cos x$ (on a bien $u \in]-1\,;1[$) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n x \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Puis, en utilisant 6- :

$$S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\,\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin x}{2\,\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \right) \cos^n x = \frac{\sin x}{2\,\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos^n x.$$

On conclut, avec les notations de l'énoncé :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z},\quad S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\,\Gamma(\alpha)} G_\alpha(\cos x)}$$

II.

☐ 10- Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $B(s) = as^{\lambda-1}\big(1 + o(1)\big)$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall\, s \in]0\,;\delta],\quad \left|B(s) - as^{\lambda-1}\right| \leqslant \varepsilon a s^{\lambda-1}.$$

On a alors, pour tout $s \in]0\,;\delta]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|B(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\right| = \left|B(s) - as^{\lambda-1}\right| \mathrm{e}^{-ns} \leqslant \varepsilon a s^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns},$$

puis, les fonctions intervenant étant intégrables sur $]0\,;\delta]$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\delta \left(B(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\right) \mathrm{d}s \right| &\leqslant \int_0^\delta \left|B(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\right| \mathrm{d}s \leqslant \int_0^\delta \varepsilon a s^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s \\ &= \varepsilon a \int_0^\delta s^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s \underset{[t=ns]}{=} \varepsilon a \int_0^{n\delta} \left(\frac{t}{n}\right)^{\lambda-1} \mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}t}{n} = \frac{\varepsilon a}{n^\lambda} \int_0^{n\delta} t^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\varepsilon a}{n^\lambda} \int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda). \end{aligned}$$

On conclut :

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \left| \int_0^\delta \left(B(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\right) \mathrm{d}s \right| \leqslant \varepsilon \frac{a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda)}$$

□ 11- Soit $\delta > 0$ fixé. On a, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$:

$$\Big| \int_\delta^{+\infty} \big(B(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\big)\,\mathrm{d}s \Big| \leqslant \int_\delta^{+\infty} \big|B(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\big|\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_\delta^{+\infty} \big|B(s)\,\mathrm{e}^{-s} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-s}\big|\,\mathrm{e}^{-(n-1)s}\,\mathrm{d}s \leqslant \Big(\int_\delta^{+\infty} \big|B(s)\,\mathrm{e}^{-s} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-s}\big|\,\mathrm{d}s \Big)\,\mathrm{e}^{-(n-1)\delta},$$

d'où le résultat demandé, en notant $C(\delta) = \displaystyle\int_\delta^{+\infty} \big|B(s)\,\mathrm{e}^{-s} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-s}\big|\,\mathrm{d}s$ et en remarquant que l'application $s \longmapsto B(s)\,\mathrm{e}^{-s} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-s}$ est bien intégrable sur $[\delta\,;+\infty[$.

□ 12- Soit $\varepsilon > 0$ fixé. D'après 10-, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \Big| \int_0^\delta \big(B(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\big)\,\mathrm{d}s \Big| \leqslant \varepsilon \frac{a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda).$$

Puis, δ étant ainsi fixé, d'après 11-, on a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\Big| \int_\delta^{+\infty} \big(B(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\big)\,\mathrm{d}s \Big| \leqslant C(\delta)\,\mathrm{e}^{-(n-1)\delta}.$$

On a donc, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\Big| \int_0^{+\infty} B(s)\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s - \int_0^{+\infty} as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s \Big| = \Big| \int_0^{+\infty} \big(B(s) - as^{\lambda-1}\big)\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s \Big|$$

$$= \Big| \int_0^\delta + \int_\delta^{+\infty} \Big| \leqslant \Big| \int_0^\delta \Big| + \Big| \int_\delta^{+\infty} \Big| \leqslant \varepsilon \frac{a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda) + C(\delta)\,\mathrm{e}^{-(n-1)\delta}.$$

Par prépondérance classique : $\qquad \mathrm{e}^{-(n-1)\delta} \underset{n\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^\lambda}\Big),$

donc, pour n assez grand : $\qquad \big|C(\delta)\,\mathrm{e}^{-(n-1)\delta}\big| \leqslant \varepsilon \dfrac{a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda).$

Il en résulte, pour n assez grand :

$$\Big| \int_0^{+\infty} B(s)\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s - \int_0^{+\infty} as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s \Big| = \frac{a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda)\,o(1).$$

Enfin :

$$\int_0^{+\infty} as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s \underset{[t=ns]}{=} a\int_0^{+\infty} \Big(\frac{t}{n}\Big)^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}t}{n} = \frac{a}{n^\lambda}\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda).$$

On conclut :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} B(s)\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s = a\frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}\big(1 + \underset{n\infty}{o}(1)\big)}$$

□ 13- On a, par le changement de variable $v = \operatorname{ch} t$, de classe C^1 et bijectif de $]0\,;+\infty[$ sur $]1\,;+\infty[$, donc qui conserve l'intégrabilité :

$$v = \operatorname{ch} t, \quad t = \operatorname{Argch} v = \ln(v + \sqrt{v^2-1}), \quad \mathrm{d}v = \operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{\operatorname{sh} t} = \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2-1}},$$

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\big(\ln(v + \sqrt{v^2-1})\big)^{\alpha-1}}{v^{n+1}}\,\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2-1}},$$

puis, par le changement de variable $s = \ln v$, de classe C^1 et bijectif de $]1\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$, donc qui conserve l'intégrabilité :

$$s = \ln v, \quad v = \mathrm{e}^{\,s}, \quad \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{\,s}\,\mathrm{d}s,$$

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\big(\ln(\mathrm{e}^{\,s} + \sqrt{\mathrm{e}^{\,2s}-1})\big)^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{\,(n+1)s}}\,\frac{\mathrm{e}^{\,s}\,\mathrm{d}s}{\sqrt{\mathrm{e}^{\,2s}-1}} = \int_0^{+\infty} \frac{\big(\ln(\mathrm{e}^{\,s} + \sqrt{\mathrm{e}^{\,2s}-1})\big)^{\alpha-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^{\,2s}-1}}\,\mathrm{e}^{\,-ns}\,\mathrm{d}s.$$

☐ 14- On a, au voisinage de 0^+ :

$$\mathrm{e}^{\,s} + \sqrt{\mathrm{e}^{\,2s}-1} = \big(1 + s + o(s)\big) + \sqrt{2s + o(s)} = 1 + \sqrt{2s} + o(\sqrt{s}),$$

$$\ln(\mathrm{e}^{\,s} + \sqrt{\mathrm{e}^{\,2s}-1}) = \ln\big(1 + \sqrt{2s} + o(\sqrt{s})\big) = \sqrt{2s} + o(\sqrt{s}) \underset{s\,\longrightarrow\,0^+}{\sim} \sqrt{2s}$$

et :

$$\sqrt{\mathrm{e}^{\,2s}-1} = \sqrt{\big(1 + 2s + o(s)\big) - 1} = \sqrt{2s + o(s)]} \underset{s\,\longrightarrow\,0^+}{\sim} \sqrt{2s},$$

d'où :

$$B(s) = \frac{\big(\ln(\mathrm{e}^{\,s} + \sqrt{\mathrm{e}^{\,2s}-1})\big)^{\alpha-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^{\,2s}-1}} \underset{s\,\longrightarrow\,0^+}{\sim} \frac{(\sqrt{2s})^{\alpha-1}}{\sqrt{2s}} = (\sqrt{2s})^{\alpha-2}.$$

On conclut :

$$\boxed{B(s) \underset{s\,\longrightarrow\,0^+}{\sim} (\sqrt{2s})^{\alpha-2}}$$

☐ 15- L'application B de 14- satisfait les conditions (4) et (5) (et la continuité) car :

• En 0 : $B(s) \underset{s\,\longrightarrow\,0^+}{\sim} (\sqrt{2s})^{\alpha-2} = 2^{\frac{\alpha}{2}-1}s^{\frac{\alpha}{2}-1} \geqslant 0$ et $\dfrac{\alpha}{2} - 1 > -1$, donc, par l'exemple de Riemann en 0 et le théorème d'équivalence pour des fonctions à valeurs réelles $\geqslant 0$, B est intégrable sur $]0\,;1]$.

• En $+\infty$:

$$B(s) = \frac{\big[\ln\big(\mathrm{e}^{\,s}[1 + (1 - \mathrm{e}^{\,-2s})^{1/2}]\big)\big]^{\alpha-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^{\,2s}-1}} = \frac{\big[\ln\big(\mathrm{e}^{\,s}[2 + o(1)]\big)\big]^{\alpha-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^{\,2s}-1}} = \frac{\big[s + \ln\big(2 + o(1)\big)\big]^{\alpha-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^{\,2s}-1}} \underset{s\,\longrightarrow\,+\infty}{\sim} \frac{s^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{\,s}},$$

donc, comme en 1-, B est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

On peut remarquer : $a_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} B(s)\,\mathrm{d}s$.

• En 0^+, on a vu : $B(s) \underset{s\,\longrightarrow\,0^+}{\sim} 2^{\frac{\alpha}{2}-1}s^{\frac{\alpha}{2}-1}$, donc $B(s) = as^{\lambda-1}\big(1 + o(1)\big)$, en notant $a = 2^{\frac{\alpha}{2}-1} > 0$ et $\lambda = \dfrac{\alpha}{2} > 0$.

D'après 12-, on a donc :

$$a_n = \int_0^{+\infty} B(s)\,\mathrm{e}^{\,-ns}\,\mathrm{d}s = a\frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}\big(1 + o(1)\big) \underset{n\infty}{\sim} a\frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda} = 2^{\frac{\alpha}{2}-1}\frac{\Gamma\Big(\dfrac{\alpha}{2}\Big)}{n^{\frac{\alpha}{2}}},$$

d'où :

$$a_n n^{\frac{\alpha}{2}} \underset{n\infty}{\sim} 2^{\frac{\alpha}{2}-1}\Gamma\Big(\frac{\alpha}{2}\Big),$$

et finalement :

$$\boxed{a_n n^{\frac{\alpha}{2}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 2^{\frac{\alpha}{2}-1}\Gamma\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)}$$

* *