Banque PT 2010 - Mathématiques A

Corrigé de Sébastien PELLERIN

Questions préliminaires

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Pour tous $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi_A(\lambda.M + N) &= A(\lambda.M + N) \\
&= \lambda.AM + AN \quad \text{(distributivité dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\text{)} \\
&= \lambda.\phi_A(M) + \phi_A(N) \\
\tau_A(\lambda.M + N) &= \operatorname{Tr}\big(A(\lambda.M + N)\big) \\
&= \operatorname{Tr}\big(\lambda.AM + AN\big) \quad \text{(distributivité dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\text{)} \\
&= \lambda.\operatorname{Tr}(AM) + \operatorname{Tr}(AN) \quad \text{(linéarité de l'application trace)} \\
&= \lambda.\tau_A(M) + \tau_A(N) \\
\gamma_A(\lambda.M + N) &= A(\lambda.M + N) - (\lambda.M + N)A \\
&= \lambda.AM + AN - \big(\lambda.MA + NA\big) \quad \text{(distributivité à gauche et à droite dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\text{)} \\
&= \lambda.(AM - MA) + (AN - NA) \\
&= \lambda.\gamma_A(M) + \gamma_A(N).
\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\text{les applications } \phi_A,\ \tau_A \text{ et } \gamma_A \text{ sont linéaires.}}$

2. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est de dimension } n^2.}$
   Si E et F sont deux espaces vectoriels, sur un même corps K, de dimensions finies alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension $\dim E \times \dim F$. En particulier, on en déduit que $\mathcal{L}(E, K)$ est de dimension $\dim E$ donc : $\boxed{\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* = n^2}$.

3. Si E est un espace vectoriel de dimension finie n et si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une famille libre de E alors il existe des vecteurs $e_{k+1}, \ldots, e_n$ de E tels que $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de E.

Partie I : un exemple

1. La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux : 1 et 2.
   Puisque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres distinctes, $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

2. Le polynôme caractéristique de la matrice B est $(X - 1)^2(X - 2)^2$.
   On en déduit que les valeurs propres sont 1 et 2 et les sous-espaces propres correspondants sont de dimension au plus 2.
   Tout d'abord, on remarque :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   donc $(1, 0, 0, 0)$ et $(0, 1, 0, 0)$ sont deux vecteurs du sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. De plus ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels donc forment une famille libre et on a vu que E_1 est de dimension au plus 2 donc :

$$E_1 = \operatorname{Vect}\big((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\big).$$

D'autre part, soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on note E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 alors :

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in E_2 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x + 3z = 2x \\ y + 3t = 2y \\ 2z = 2z \\ 2t = 2t \end{cases} \\
&\iff x = 3z \text{ et } y = 3t \\
&\iff (x,y,z,t) = (3z, 3t, z, t) \\
&\iff (x,y,z,t) = z.(3,0,1,0) + t.(0,3,0,1) \\
&\iff (x,y,z,t) \in \text{Vect}\big((3,0,1,0),(0,3,0,1)\big).
\end{aligned}$$

De plus, les vecteurs $(3, 0, 1, 0)$ et $(0, 3, 0, 1)$ ne sont pas proportionnels donc forment une famille libre donc ils forment une base de :

$$E_2 = \text{Vect}\big((3,0,1,0),(0,3,0,1)\big).$$

Les calculs précédents montrent que E_1 et E_2 sont tous deux de dimension 2 ce qui correspond à la multiplicité de la valeur propre correspondante donc $\boxed{B \text{ est diagonalisable}}$ est une base de vecteurs propres est constituée par les vecteurs :

$$\boxed{(1,0,0,0)\ ,\ (0,1,0,0)\ , (3,0,1,0) \text{ et } (0,3,0,1).}$$

3. (a) On a :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\iff \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ / \ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ / \ M = a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ / \ M = a.E_{11} + b.E_{12} + cE_{21} + d.E_{22} \\
&\iff M \in \text{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})
\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\mathcal{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ or cette famille contient 4 éléments et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4 donc cette famille génératrice est également libre donc c'est $\boxed{\text{une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

(b) On a :

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\phi_A(E_{11}) = E_{11}}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\phi_A(E_{12}) = E_{12}}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\phi_A(E_{21}) = 3E_{11} + 2E_{21}}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\phi_A(E_{22}) = 3E_{12} + 2E_{22}}$.

(c) Les relations précédentes montrent que $\boxed{B \text{ est la matrice de } \phi_A \text{ dans la base } \mathcal{E}.}$

(d) D'après les questions I.2 et I.3.c, $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable.}}$
Une base de vecteurs propres de B est constituée par les vecteurs :

$$(1,0,0,0)\ ,\ (0,1,0,0)\ , (3,0,1,0) \text{ et } (0,3,0,1)$$

donc une base de vecteurs propres de ϕ_A est constituée par les matrices :

$$\boxed{E_{11}\ ,\ E_{12}\ ,\ 3E_{11} + E_{12} \text{ et } 3E_{12} + E_{22}.}$$

Partie II : réduction de l'endomorphisme ϕ_A

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\phi_A(M) = \lambda M$ ce qui signifie $AM = \lambda M$ puis $(A - \lambda\,\mathrm{I}_n)M = 0_n$.
   Si la matrice $A - \lambda\,\mathrm{I}_n$ était inversible alors on en déduirait :
   $$(A - \lambda\,\mathrm{I}_n)^{-1}(A - \lambda\,\mathrm{I}_n)M = 0_n \quad \text{donc} \quad M = 0_n$$
   ce qui contredit l'hypothèse M non nulle.
   Donc $\boxed{\text{la matrice } A - \lambda\,\mathrm{I}_n \text{ n'est pas inversible.}}$
2. Si λ est une valeur propre de ϕ_A alors il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\phi_A(M) = \lambda M$.
   D'après la question précédente, on en déduit que la matrice $A - \lambda\,\mathrm{I}_n$ n'est pas inversible donc que $\boxed{\lambda \text{ est une valeur propre de } A.}$
3. Supposons que M soit la matrice dont la k^{e} colonne est X et toutes les autres sont nulles, on note $C_1, \ldots, C_n$ lesdites colonnes alors les colonnes de la matrice AM sont $AC_1, \ldots, AC_n$.
   Si $i \neq k$ alors le produit AC_i est la colonne nulle.
   Sinon, on a $AC_k = AX$ donc $AC_k = \mu X$.
   Donc AM est la matrice dont la k^{e} colonne est μX et toutes les autres sont nulles donc $AM = \mu M$.
   On a $\phi_A(M) = \mu M$ et M est non nulle (puisque X est non nulle) donc $\boxed{M \text{ est un vecteur propre de } \phi_A.}$
4. D'après la question II.2, une valeur propre de ϕ_A est une valeur propre de A.
   D'après la question II.3, une valeur propre de A est une valeur propre de ϕ_A.
   On en déduit que $\boxed{\text{les valeurs propres de } \phi_A \text{ sont celles de } A.}$
5. On suppose A diagonalisable alors A admet une base de vecteurs propres correspondant à des vecteurs colonnes $X_1, \ldots, X_n$.
   Pour tous $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$, on note $M_{i,j}$ la matrice dont la j^{e} colonne est X_i et dont toutes autres colonnes sont nulles.
   D'après la question II.3, les matrices $M_{i,j}$ sont des vecteurs propres de ϕ_A.
   De plus, considérons une combinaison linéaire nulle des matrices précédentes :
   $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} M_{i,j} = 0_n.$$
   En considérant la j^{e} colonne, on peut écrire :
   $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i = 0_{n,1}$$
   or $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\lambda_{1,j}, \ldots, \lambda_{n,j}$ sont tous nuls.
   Puisque j est quelconque entre 1 et n, on en déduit que tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls *i.e.* la famille des matrices $M_{i,j}$ est libre or elle contient n^2 vecteurs ce qui correspond à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Ainsi, ϕ_A admet une base de vecteurs propres donc $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable.}}$

Partie III : un théorème de factorisation

1. Soit $x \in \ker(u)$ alors $u(x) = 0_F$.
   On en déduit que : $w\big(u(x)\big) = w(0_F)$ donc $(w \circ u)(x) = 0_G$ *i.e.* $v(x) = 0_G$.
   Ainsi, si $x \in \ker(u)$ alors $x \in \ker(v)$. On a donc $\boxed{\ker(u) \subset \ker(v)}$.
2. (a) Puisque $\dim(\ker(u)) = n - p$, il existe une base de $\ker(u)$ que l'on peut noter $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
   Il s'agit *a fortiori* d'une famille libre de vecteurs de E donc, d'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ tels que $\boxed{(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n) \text{ soit une base de } E.}$
   Le théorème du rang donne :
   $$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) \quad i.e. \quad n = n - p + \dim(\mathrm{Im}(u))$$
   donc $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(u)) = p}$.

(b) Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$.

Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ avec les ξ_i réels.

On en déduit :

$$\begin{aligned} y &= u(x) \\ &= u\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \xi_i u(e_i) + \sum_{i=p+1}^{n} \xi_i \underbrace{u(e_i)}_{=0_F} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \xi_i f_i \end{aligned}$$

ce qui montre que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ engendre $\mathrm{Im}(u)$ or cette famille comporte p vecteurs et $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension p donc $\boxed{(f_1, \dots, f_p) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(u).}$

(c) La relation $\ker(u) \subset \ker(v)$ donne : $\forall i \in [\![p+1, n]\!],\ v(e_i) = 0_G$.

Ainsi :

- $\forall i \in [\![p+1, n]\!],\ w(u(e_i)) = w(0_F) = 0_G$ et $v(e_i) = 0_G$
- $\forall i \in [\![1, p]\!],\ w(u(e_i)) = w(f_i) = v(e_i)$

Ainsi, les applications linéaires $w \circ u$ et v coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E donc sont égales : $\boxed{v = w \circ u.}$

Partie IV : une caractérisation des matrices nilpotentes

1. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre colonne associé.
Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(k)$: « $A^k X = \lambda^k X$ » dépendant de $k \in \mathbb{N}^*$.

   - Par choix de X, on a $AX = \lambda X$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
   Puisque $\mathcal{P}(k)$ est supposée vraie par hypothèse de récurrence, on a $A^k X = \lambda^k X$.
   Alors :

   $$\begin{aligned} A^{k+1} X &= A^k (AX) \\ &= A^k (\lambda X) \\ &= \lambda A^k X \\ &= \lambda \lambda^k X \\ &= \lambda^{k+1} X \end{aligned}$$

   donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
   - On a $\mathcal{P}(1)$ vraie et : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \big(\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)\big)$.
   D'après le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   En particulier, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \lambda^k \text{ est une valeur propre de } A^k.}$

2. (a) Puisque A est nilpotente, il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que A^p soit la matrice nulle.
Si λ est une valeur propre de A alors, d'après la question précédente, λ^p est une valeur propre de A^p qui est la matrice nulle donc $\lambda^p = 0$.
On en déduit que $\lambda = 0$ *i.e.* $\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre de } A}$.

(b) Trigonalisons A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: puisque 0 est la seule valeur propre de A, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$.

En particulier on a $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = 0$ mais :

$$\mathrm{Tr}(P^{-1}(AP)) = \mathrm{Tr}((AP)P^{-1}) \text{ donc } \boxed{\mathrm{Tr}(A) = 0}.$$

3. (a) Puisque $AM = MA$, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (AM)^k = A^k M^k$.
Puisque A est nilpotente, il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que A^p soit la matrice nulle, on a donc :

$$(AM)^p = 0_n \times M^p = 0_n$$

donc $\boxed{AM \text{ est nilpotente.}}$

(b) Soit $M \in \ker(\gamma_A)$ *i.e.* $AM - MA$ est la matrice nulle.
D'après la question précédente, on en déduit que la matrice AM est nilpotente.
D'après la question IV.2.b, on en déduit que AM est de trace nulle *i.e.* $\tau_A(M) = 0$.
Ainsi, pour tout $M \in \ker(\gamma_A)$, on a $M \in \ker(\tau_A)$ *i.e.* $\boxed{\ker(\gamma_A) \subset \ker(\tau_A)}$.

(c) i. Le coefficient à la place (i, j) de ${}^tK$ est $k_{j,i}$ donc le coefficient à la place (i, j) de ${}^tKK$ est : $\sum_{r=1}^{n} k_{r,i} k_{r,j}$.
En particulier, le coefficient à la place (i, i) de ${}^tKK$ est : $\sum_{r=1}^{n} k_{r,i}^2$.
On en déduit :

$$\boxed{\mathrm{Tr}({}^tKK) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{i,j}^2.}$$

ii. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
Puisqu'une matrice et sa transposée ont les mêmes éléments diagonaux, elles ont la même trace donc ${}^tMN$ et ${}^t({}^tMN) = {}^tNM$ ont la même trace d'où :

$$\langle M, N \rangle = \langle N, M \rangle$$

i.e. l'application considérée est symétrique.
De plus, la linéarité de l'application τ_M montrée en première question du problème montre la linéarité à droite de l'application considérée or celle-ci est symétrique donc elle est bilinéaire.
Enfin, en notant $M = (m_{i,j})$, on a d'après la question précédente :

$$\langle M, M \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 \geqslant 0$$

et cette somme ne peut être nulle (somme de carrés de réels) que lorsque tous les $m_{i,j}$ sont nuls *i.e.* lorsque M est nulle. Donc l'application considérée est définie positive.
Ainsi, l'application considérée est bien $\boxed{\text{un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

iii. Un théorème affirme que : si E est un espace euclidien pour un produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y)$ et si $\varphi \in E^*$ alors il existe un unique $a \in E$ tel que $\varphi(x) = (a|x)$ pour tout $x \in E$.
D'après la question précédente, on a donc :

$$\forall \varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*,\ \exists! V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ /\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \mathrm{Tr}({}^tVM)$$

ce qui donne en transposant la matrice dont on obtient l'existence :

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*,\ \exists! U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ /\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \mathrm{Tr}(UM).}$$

Autre preuve conforme au programme PT :
Considérons l'application suivante :

$$T:\ \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*,\ U \mapsto \tau_U.$$

Soit $(U,V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ T(\lambda.U+V)(M) &= \tau_{\lambda.U+V}(M)\\ &= \mathrm{Tr}\left((\lambda.U+V)M\right)\\ &= \lambda\,\mathrm{Tr}(UM)+\mathrm{Tr}(VM)\\ &= \lambda\tau_U(M)+\tau_V(M)\\ &= \lambda T(U)(M)+T(V)(M)\end{aligned}$$

ce qui montre que $T(\lambda.U+V) = \lambda T(U)+T(V)$ *i.e.* T est linéaire.
Considérons $U \in \ker(T)$ alors :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \tau_U(M) = 0\ \ \textit{i.e.}\ \ \mathrm{Tr}(UM) = 0.$$

En particulier, pour $M = {}^tU$, il vient :

$$\mathrm{Tr}(U\,{}^tU) = 0\ \text{ puis }\ \mathrm{Tr}({}^tUU) = 0.$$

Le caractère défini positif du produit scalaire de la question précédente montre que U est la matrice nulle donc T est injectif.
Ainsi, T est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriel de même dimension finie donc T est bijectif ce qui donne :

$$\forall \varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*,\ \exists! U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ \varphi = T(U)$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*,\ \exists! U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \mathrm{Tr}(UM).}$$

iv. D'après la question IV.3.b, on a : $\ker(\gamma_A) \subset \ker(\tau_A)$.
De plus, $\gamma_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $\tau_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})$ donc, d'après la partie III du problème, il existe $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})$ telle que $\tau_A = \varphi \circ \gamma_A$.
Mais d'après la question précédente, il existe une (unique) matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \mathrm{Tr}(BM).$$

Autrement dit, $\varphi = \tau_B$.
Finalement, on a montré l'existence (et l'unicité) de $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\boxed{\tau_A = \tau_B \circ \gamma_A}$.

(d) La relation précédente donne :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}\left(B(AM-MA)\right)$$

d'où en utilisant les propriétés de l'application Tr :

$$\begin{aligned}\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(AM) &= \mathrm{Tr}(BAM-BMA)\\ &= \mathrm{Tr}(BAM)-\mathrm{Tr}(BMA)\\ &= \mathrm{Tr}(BAM)-\mathrm{Tr}(ABM)\\ &= \mathrm{Tr}\left((BA-AB)M\right)\end{aligned}$$

ce qui montre que les deux formes linéaires suivantes sont égales :

$$M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)\ \text{ et }\ M \mapsto \mathrm{Tr}\left((BA-AB)M\right)$$

D'après l'unicité de la matrice U dans le résultat de la question IV.3.c.iii., on en déduit que : $\boxed{A = BA-AB}$.

Autre argument possible pour conclure :
Les calculs ci-dessus donnent en utilisant encore les propriétés de la trace :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{Tr}\big(M\big(A-(BA-AB)\big)\big) = 0.$$

Pour $M = {}^t\big(A-(BA-AB)\big)$, il vient donc :

$$\operatorname{Tr}\big({}^t\big(A-(BA-AB)\big)\big(A-(BA-AB)\big)\big) = 0$$

et d'après le caractère défini positif du produit scalaire de la question IV.3.c.ii., on en déduit que $A-(BA-AB)=0$ *i.e.* $A = BA - AB$.

4. (a) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{Q}(k)$: « $BA^k - A^kB = kA^k$ » dépendant de $k \in \mathbb{N}^*$.

- Par hypothèse, on a $BA - AB = A$ donc $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{Q}(k)$ soit vraie, montrons que $\mathcal{Q}(k+1)$ est vraie.
Puisque $\mathcal{Q}(k)$ est supposée vraie par hypothèse de récurrence, on a $BA^k - A^kB = kA^k$.
Alors :

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= AA^k \\ &= (BA-AB).A^k \\ &= BA^{k+1} - A(BA^k) \\ &= BA^{k+1} - A(kA^k + A^kB) \\ &= BA^{k+1} - kA^{k+1} - A^{k+1}B \end{aligned}$$

d'où $(k+1)A^{k+1} = BA^{k+1} - A^{k+1}B$ et $\mathcal{Q}(k+1)$ est vraie.
- On a $\mathcal{Q}(1)$ vraie et : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \big(\mathcal{Q}(k) \Rightarrow \mathcal{Q}(k+1)\big)$.
D'après le théorème de récurrence, $\mathcal{Q}(k)$ est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
On a donc : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, BA^k - A^kB = kA^k.}$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, la relation précédente s'écrit : $\gamma_B(A^k) = kA^k$.
Ainsi : $\boxed{\text{si } A^k \text{ est non nulle alors } A^k \text{ est un vecteur propre de } \gamma_B \text{ associé à la valeur propre } k.}$

(c) Supposons A non nilpotente alors A^k est non nulle pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
D'après les deux question précédentes, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est un vecteur propre de γ_B associé à la valeur propre k.
En particulier, γ_B admet une infinité de valeurs propres distinctes ce qui n'est pas possible pour un endomorphisme en dimension finie.
Donc $\boxed{A \text{ est nilpotente.}}$