Corrigé de Centrale 2012 PC math 1

Partie I

I.A 1) La formule du binôme donne $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=(x+1-x)^n=1$.

2) Pour $k\geqslant 1$, $k\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=n\binom{n-1}{k-1}$.

Donc $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}=nx(x+1-x)^{n-1}=nx$.

3) Pour $k\geqslant 2$, $k(k-1)\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{(k-2)!(n-k)!}=n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$.

Donc $\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}=n(n-1)x^2(x+1-x)^{n-2}=n(n-1)x^2$.

4) $\left(x-\dfrac{k}{n}\right)^2=x^2-2x\dfrac{k}{n}+\dfrac{k^2-k}{n^2}+\dfrac{k}{n^2}$ donne avec 1), 2) et 3):

$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\dfrac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=x^2-2x^2+\dfrac{n(n-1)x^2}{n^2}+\dfrac{x}{n}=\dfrac{x-x^2}{n}$.

I.B 1) a) $S_V(x)\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k\in V}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b) Pour $k\in W$ on a $\sqrt{n}\left|x-\dfrac{k}{n}\right|>1$ donc $\sqrt{n}\left|x-\dfrac{k}{n}\right|<n\left(x-\dfrac{k}{n}\right)^2$.

Par suite, $\sqrt{n}S_W(x)<n\sum_{k=0}^{n}\left(x-\dfrac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=x(1-x)$ par I.A.4

D'où $S_W(x)\leqslant\dfrac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.

c) $f(x)=x(1-x)$ a un maximum égal à $\dfrac{1}{4}$ (obtenu pour $x=\dfrac{1}{2}$).

Donc $S_W(x)\leqslant\dfrac{1}{4\sqrt{n}}$ et $S(x)=S_V(x)+S_W(x)\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{4\sqrt{n}}=\dfrac{5}{4\sqrt{n}}$

2) a) L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit: $|\sum_{k=0}^{n}a_kb_k|\leqslant\sqrt{\sum_{k=0}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}b_k^2}$.

b) Pour $a_k=\left|x-\dfrac{k}{n}\right|\sqrt{\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}$ et $b_k=\sqrt{\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}$ on obtient:

$S(x)\leqslant\sqrt{\dfrac{x(1-x)}{n}}$ (en utilisant I.A.1 et I.A.4).

De $x(1-x)\leqslant\dfrac{1}{4}$ on déduit $S(x)\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

I.C 1) Pour $f(x)=x^2$ on calcule en écrivant $k^2=k(k-1)+k$ et en utilisant les I.A.2 et I.A.3:

$B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\dfrac{1}{n^2}(n(n-1)x^2+nx)=\dfrac{(n-1)x^2+x}{n}$.

Par suite, $B_n(f)(x) - x^2 = \dfrac{x(1-x)}{n}$ d'où $||B_n(f) - f||_\infty = \dfrac{1}{4n}$ puisque $0 \leqslant x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$, le maximum étant atteint pour $x = \dfrac{1}{2}$.

2) Immédiat avec le I.A.1.

3) a) Si f est δ-lipschitzienne, $|f(\dfrac{k}{n}) - f(x)| \leqslant \delta|\dfrac{k}{n} - x|$ d'où $|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \delta S(x) \leqslant \delta\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ avec le I.B.2.
C'est vérifié pour tout $x \in [0,1]$ donc $||B_n(f) - f||_\infty \leqslant \dfrac{\delta}{2\sqrt{n}}$.

b) Si f est de classe C^1, elle est δ-lipschitzienne sur $[0,1]$ par l'inégalité des accroissements finis (avec $\delta = ||f'||_\infty$). On peut donc lui appliquer le a) et $c = \dfrac{\delta}{2}$.

c) L'inégalité des accroissements finis s'applique plus généralement à une fonction continue et de classe C^1 par morceaux sur un segment: f est donc δ-lipschitzienne sur $[0,1]$ avec $\delta = ||f'||_\infty$ et le résultat du b) est encore valable.

4) Soit $r > 0$ et un entier n tel que $\dfrac{c}{\sqrt{n}} < r$. Le polynôme $P = B_n(f)$ vérifie pour tout $x \in [0,1]$:
$|P(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{c}{\sqrt{n}} \leqslant r$ donc $f(x) - r \leqslant P(x) \leqslant f(x) + r$.

Partie II

II.A 1) $\dfrac{1}{1-x^2}$ est la somme de la série géométrique de raison x^2 et de premier terme 1, donc $b_n = 1$ si n est pair, 0 si n est impair.

2) En prenant $a_n = 2b_n$ on obtient $f(x) = \dfrac{2}{1-x^2}$ qui vérifie bien $f(x) \sim \dfrac{1}{1-x}$ au voisinage de 1^-. Mais la suite (a_n) diverge puisque $a_{2n} = 2$ et $a_{2n+1} = 0$.

II.B 1) Par dérivation de $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ pour $t \in]-1,1[$ on obtient $\dfrac{1}{(1-t)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1}$ avec le même rayon de convergence égal à 1. La série diverge pour $t = 1$ et pour $t = -1$ puisque son terme général ne tend pas vers 0.

2) En posant $t = x^2$ et en changeant n en $n+1$ on obtient $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{2n}$ pour $x \in]-1,1[$.
Par suite, $u_{2n} = n+1$ et $u_{2n+1} = 0$.
$\psi(x) = (1-x)\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(x^{2n} - x^{2n+1})$ pour $x \in]-1,1[$. Par suite, $v_{2n} = n+1$ et $v_{2n+1} = -(n+1)$.

3) Puisque $v_{2n} + v_{2n+1} = 0$ on déduit $\tilde{v}_{2n+1} = 0$ et $\tilde{v}_{2n} = \dfrac{n+1}{2n+1}$.

4) En prenant $a_n = 4v_n$, on obtient $f(x) = \dfrac{4}{(1+x)^2(1-x)}$ qui vérifie bien $f(x) \sim \dfrac{1}{1-x}$ au voisinage de 1^-. Mais la suite $(\tilde{a}_n)$ diverge puisque $\tilde{a}_{2n+1} = 0$ alors que $\tilde{a}_{2n}$ tend vers 2.

II.C 1) Pour $x \in [0,1[$ et $k \leqslant n$ on a $x^k \geqslant x^n$. De plus $a_n \geqslant 0$.
On en déduit: $f(x) \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \geqslant \sum_{k=0}^{n} a_k x^n = A_n x^n$.

2) Par hypothèse, $(1-x)f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 1. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $1-\varepsilon \leqslant x < 1$ entraine $(1-x)f(x) \leqslant 2$.
Comme $e^{-1/n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini on déduit qu'il existe $N > 0$ tel que $n \geqslant N$ entraine $1-\varepsilon \leqslant e^{-1/n} < 1$ et donc $(1-e^{-1/n})f(e^{-1/n}) \leqslant 2$, d'où $f(e^{-1/n}) \leqslant \dfrac{2}{1-e^{-1/n}}$.

3) Pour $x = e^{-1/n}$ et $n \geqslant N$ on a $A_n e^{-1} \leqslant f(e^{-1/n}) \leqslant \dfrac{2}{1-e^{-1/n}}$ d'où:
$\tilde{a}_n \leqslant \dfrac{2e}{(n+1)(1-e^{-1/n})} \leqslant \dfrac{2ee^{1/n}}{n(e^{1/n}-1)} \leqslant 2e^2$ puisque $e^x - 1 \geqslant x$ et $n \geqslant 1$.
La suite $\tilde{a}_n$ est majorée pour $n \geqslant N$, donc aussi pour tout n.

II.D 1) a) $(1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_k x^k = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k - \sum_{k=0}^{n} A_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k - \sum_{k=1}^{n+1} A_{k-1} x^k = A_0 + \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})x^k - A_n x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - A_n x^{n+1}$. Comme pour $x \in]-1,1[$, $|A_n x^{n+1}| \leqslant A_n |x|^{n+1} \leqslant (n+1)\mu |x|^{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on déduit $(1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k = f(x)$.

b) $\dfrac{f(x)}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} A_k x^k + \sum_{k=N}^{+\infty} A_k x^k \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} A_{N-1} x^k + \sum_{k=N}^{+\infty} (k+1)\mu x^k$ (puisque $x \geqslant 0$, que la suite A_k est croissante et que $A_k \leqslant (k+1)\mu$). Par suite, $\dfrac{f(x)}{1-x} \leqslant A_{N-1}\dfrac{1-x^N}{1-x} + \mu \displaystyle\sum_{k=N}^{+\infty}(k+1)x^k$.

c) On en déduit (toujours pour $x \in [0,1[$): $f(x) \leqslant A_{N-1} + \mu \displaystyle\sum_{k=N}^{+\infty}(k+1)(x^k - x^{k+1})$.
$\displaystyle\sum_{k=N}^{n}(k+1)(x^k - x^{k+1}) = \sum_{k=N}^{n}(k+1)x^k - \sum_{k=N+1}^{n+1} kx^k = (N+1)x^N + \sum_{k=N+1}^{n} x^k - (n+1)x^{n+1}$
qui tend vers $(N+1)x^N + \dfrac{x^{N+1}}{1-x}$ quand n tend vers l'infini.
On a donc $f(x) \leqslant A_{N-1} + \mu\left((N+1)x^N + \dfrac{x^{N+1}}{1-x}\right)$.

2) a) Par hypothèse, $(1-x)f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 1, donc $(1-e^{-x})f(e^{-x})$ tend vers 1 quand x tend vers 0. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $0 < x \leqslant \varepsilon$ entraine $(1-e^{-x})f(e^{-x}) \geqslant \frac{1}{2}$.
D'autre part, $e^{-x} \geqslant 1-x$ entraine pour $x > 0$: $\dfrac{1}{1-e^{-x}} \geqslant \dfrac{1}{x}$. On en déduit $f(e^{-x}) \geqslant \dfrac{1}{2x}$ pour $0 < x \leqslant \varepsilon$. En posant $x = \dfrac{\lambda}{N}$ on obtient $f(e^{-\frac{\lambda}{N}}) \geqslant \dfrac{N}{2\lambda}$ pour $N \geqslant N_0$.

b) En prenant $x = e^{-\frac{\lambda}{N}}$ dans II.D.1.c on obtient avec II.D.2.a (pour $N \geqslant N_0$):
$A_{N-1} \geqslant \dfrac{N}{2\lambda} - \mu\left((N+1)e^{-\lambda} + \dfrac{e^{-\lambda}e^{-\frac{\lambda}{N}}}{1-e^{-\frac{\lambda}{N}}}\right)$.
Avec $\tilde{a}_{N-1} = \dfrac{A_{N-1}}{N}$ on obtient $\tilde{a}_{N-1} \geqslant \dfrac{1}{2\lambda} - \mu e^{-\lambda}\left(1 + \dfrac{1}{N} + \dfrac{e^{-\frac{\lambda}{N}}}{N(1-e^{-\frac{\lambda}{N}})}\right)$.

c) Avec $1 - e^{-x} \sim x$ au voisinage de 0 on déduit que $N(1-e^{-\frac{\lambda}{N}}) \sim \lambda$ quand N tend vers l'infini. Par suite le membre de droite du II.D.2.b a pour limite (quand N tend vers l'infini): $\dfrac{1}{2\lambda} - \mu e^{-\lambda}\left(1 + \dfrac{1}{\lambda}\right) = \dfrac{1}{2\lambda}(1 - 2\mu e^{-\lambda}(\lambda+1)) = 2\nu$.

d) $\displaystyle\lim_{\lambda \mapsto +\infty} e^{-\lambda}(\lambda+1) = 0$ entraine que $\nu > 0$ pour λ assez grand.

3) Pour un tel λ on obtient $\tilde{a}_n \geqslant \nu > 0$ pour $n \geqslant N_0 + 1$.

II.E 1) $\displaystyle\int_0^1 g^+(t)dt = \int_0^{e^{-1}-\varepsilon} 0dt + \frac{1}{2}e\varepsilon + \int_{e^{-1}}^1 \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}e\varepsilon + 1.$

$\displaystyle\int_0^1 g^-(t)dt = \int_0^{e^{-1}} 0dt + \frac{1}{2}\frac{1}{e^{-1}+\varepsilon}\varepsilon + \int_{e^{-1}+\varepsilon}^1 \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{e^{-1}+\varepsilon} - \ln(e^{-1}+\varepsilon).$

2) Pour $P(x) = x^k$: $\displaystyle(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) = \frac{1-x}{1-x^{k+1}}(1-x^{k+1})f(x^{k+1})$. Comme $\displaystyle\frac{1-x}{1-x^{k+1}} = \frac{1}{1+x+x^2+...+x^k}$ tend vers $\displaystyle\frac{1}{k+1}$ quand x tend vers 1 on déduit avec $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1}(1-x)f(x) = 1$ que $\displaystyle(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n)$ tend vers $\displaystyle\frac{1}{k+1} = \int_0^1 P(t)dt$ quand x tend vers 1.
Par linéarité de la limite et de l'intégrale le résultat s'étend à tout polynôme.

3) La fonction $g^- - \dfrac{\varepsilon}{2}$ est continue et de classe C^1 par morceaux sur $[0,1]$. On peut donc lui appliquer le résultat du I.C.4 pour $r = \dfrac{\varepsilon}{2}$: il existe un polynôme P tel que $g^-(x) - \varepsilon \leqslant P(x) \leqslant g^-(x)$ pour $x \in [0,1]$.
De même la fonction $g^+ + \dfrac{\varepsilon}{2}$ est continue et de classe C^1 par morceaux sur $[0,1]$, on peut lui appliquer le résultat du I.C.4 pour $r = \dfrac{\varepsilon}{2}$: il existe un polynôme Q tel que $g^+(x) \leqslant Q(x) \leqslant g^+(x) + \varepsilon$ pour $x \in [0,1]$.
Comme $g^-(x) \leqslant g(x) \leqslant g^+(x)$ on a bien obtenu $g^-(x) - \varepsilon \leqslant P(x) \leqslant g(x) \leqslant Q(x) \leqslant g^+(x) + \varepsilon$ pour $x \in [0,1]$.

4) Puisque $x_N = e^{-1/N}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini, on déduit du II.E.2 que $\displaystyle(1-x_N)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n P(x_N^n) \geqslant \int_0^1 P(t)dt - \varepsilon$ pour $N \geqslant A$.
De même, $\displaystyle(1-x_N)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n Q(x_N^n) \leqslant \int_0^1 Q(t)dt + \varepsilon$ pour $N \geqslant B$.
Les deux inégalités sont donc vérifiées pour $N \geqslant N_1 = \max(A, B)$.

5) $x_N^n = e^{-\frac{n}{N}} \geqslant e^{-1} \Leftrightarrow n \leqslant N$. Par suite $x_N^n g(x_N^n) = 0$ si $n > N$ et 1 si $n \leqslant N$, donc $\displaystyle(1-x_N)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n g(x_N^n) = (1-x_N)A_N$. Puisque $a_n x_N^n \geqslant 0$ on déduit du II.E.3:

$$(1-x_N)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n P(x_N^n) \leqslant (1-x_N)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n g(x_N^n) = (1-x_N)A_N \leqslant (1-x_N)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n Q(x_N^n).$$

Puis avec le II.E.4: $\displaystyle\int_0^1 P(t)dt - \varepsilon \leqslant (1-x_N)A_N \leqslant \int_0^1 Q(t)dt + \varepsilon$ pour $N \geqslant N_1$.
Puis avec le II.E.3: $\displaystyle\int_0^1 g^-(t)dt - 2\varepsilon \leqslant (1-x_N)A_N \leqslant \int_0^1 g^+(t)dt + 2\varepsilon.$
$\displaystyle\int_0^1 g^+(t)dt = \frac{1}{2}e\varepsilon + 1 \leqslant 1 + 2\varepsilon$ donne $(1-x_N)A_N \leqslant 1 + 4\varepsilon \leqslant 1 + 5\varepsilon$.
$\displaystyle\int_0^1 g^-(t)dt = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{e^{-1}+\varepsilon} - \ln(e^{-1}+\varepsilon) \geqslant -\ln(e^{-1}+\varepsilon) = 1 - \ln(1+e\varepsilon) \geqslant 1 - e\varepsilon$ en utilisant $\ln(1+x) \leqslant x$. On obtient $\displaystyle\int_0^1 g^-(t)dt \geqslant 1 - 3\varepsilon$ d'où $(1-x_N)A_N \geqslant 1 - 5\varepsilon$.

6) On a donc démontré que $\displaystyle\lim_{N\mapsto+\infty}(1-e^{-1/N})A_N = 1$.

Donc $\displaystyle\lim_{N\mapsto+\infty}\tilde{a}_N = \lim_{N\mapsto+\infty}\frac{A_N}{N+1} = \lim_{N\mapsto+\infty}\frac{N}{N+1}(1-e^{-1/N})A_N\frac{1}{N(1-e^{-1/N})} = 1.$