

A. Préliminaires

1) Soit $f \in \mathcal{L}$ et $g : (x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x)e^{-2i\pi x\xi}$.

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $g(\cdot, \xi)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} car f et $x \mapsto e^{-2i\pi x\xi}$ le sont.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g(x, \cdot)$ est continue sur \mathbb{R} .

On a pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}$, $|g(x, \xi)| = |f(x)|$ et $|f|$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Donc par le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction \widehat{f} est définie et continue sur \mathbb{R} .

2) L'énoncé admet que \mathcal{L} et \mathcal{L}^* sont des sous-espaces vectoriels de l'espace des applications de \mathbb{R} vers \mathbb{C} . $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$ par comparaison aux fonctions de Riemann.

Notons \mathcal{F} l'application qui à $f \in \mathcal{L}$ associe $\widehat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Par linéarité de l'intégrale, \mathcal{F} est linéaire.

Or $\mathcal{W} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ et $\mathcal{W}^* = \mathcal{L}^* \cap \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{L}^*)$.

Par les théorèmes sur les intersections de sous-espaces vectoriels et les images réciproques de sous-espaces vectoriels par une application linéaire, \mathcal{W} et \mathcal{W}^* sont des sous-espaces vectoriels de \mathcal{L} .

Par croissance de \mathcal{F}^{-1} (au sens de l'inclusion), $\mathcal{W}^* \subset \mathcal{W}$ car $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

3) Soit $f \in \mathcal{L}$, $\alpha > 0$, $y, \nu \in \mathbb{R}$.

La fonction $u \mapsto x = \frac{u}{\alpha}$ est de classe \mathcal{C}^1 et bijective de \mathbb{R} vers lui-même, avec $\frac{dx}{du} = \frac{1}{\alpha}$, donc f_α est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} car $u \mapsto \frac{1}{\alpha}f(u)$ l'est, et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f_\alpha}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x)e^{-2i\pi x\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2i\pi \frac{u}{\alpha}\xi} \frac{du}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\widehat{f_\alpha} = \frac{1}{\alpha}(\widehat{f})_{1/\alpha}}$$

De même avec le changement de variable $u \mapsto x = u - y$ on obtient l'intégrabilité de $f_{y,\nu}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{f_{y,\nu}}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)e^{-2i\pi x(\xi+\nu)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2i\pi(u-y)(\xi+\nu)} du = e^{2i\pi y(\xi+\nu)} \widehat{f}(\xi+\nu)$$

$$\text{Donc } \boxed{\widehat{f_{y,\nu}} = e^{2i\pi y\nu}(\widehat{f})_{\nu,-y}}$$

Si $f \in \mathcal{W}$ alors $\widehat{f} \in \mathcal{L}$, donc $\widehat{f_\alpha} = \frac{1}{\alpha}(\widehat{f})_{1/\alpha}$ appartient à \mathcal{L} et ainsi $f_\alpha \in \mathcal{W}$; et $\widehat{f_{y,\nu}} = e^{2i\pi y\nu}(\widehat{f})_{\nu,-y}$ appartient à \mathcal{L} donc $f_{y,\nu} \in \mathcal{W}$.

Supposons que $f \in \mathcal{L}^*$. Alors il existe $\beta > 1$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que $x \mapsto |x|^\beta |f(x)|$ soit majorée par M et on a pour tout réel x , $|x|^\beta |f_\alpha(x)| = \frac{1}{\alpha^\beta} |\alpha x|^\beta |f(\alpha x)| \leq \frac{1}{\alpha^\beta} M$, donc $f_\alpha \in \mathcal{L}^*$. De plus, pour $|x| \geq 2|y|$, $|x|^\beta |f_{y,\nu}(x)| = |x|^\beta |f(x+y)| \leq \left|\frac{x}{x+y}\right|^\beta M \leq \left(\frac{|x|}{|x|-|y|}\right)^\beta M = \left(1 + \frac{|y|}{|x|-|y|}\right)^\beta M \leq 2^\beta M$ et comme par ailleurs $x \mapsto |x|^\beta |f_{y,\nu}(x)|$ est continue donc bornée sur le segment $[-2|y|, 2|y|]$, elle est bornée sur \mathbb{R} donc $f_{y,\nu} \in \mathcal{L}^*$.

Si de plus $f \in \mathcal{W}^*$ alors $\widehat{f} \in \mathcal{L}^*$ donc par ce qui précède, $\widehat{f_\alpha} = \frac{1}{\alpha}(\widehat{f})_{1/\alpha}$ appartient à \mathcal{L}^* donc $f_\alpha \in \mathcal{W}^*$; et $\widehat{f_{y,\nu}} = e^{2i\pi y\nu}(\widehat{f})_{\nu,-y}$ appartient à \mathcal{L}^* donc $f_{y,\nu} \in \mathcal{W}^*$.

Ainsi \mathcal{W} et \mathcal{W}^* sont stables par les transformations $f \mapsto f_\alpha$ et $f \mapsto f_{y,\nu}$.

4)

$$\begin{aligned}
 \text{Pour } \xi \in \mathbb{R}^*, \widehat{s}(\xi) &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi x\xi} dx \\
 &= \left[\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{-2i\pi\xi} \right]_{-1/2}^{1/2} \\
 &= \frac{-2i \sin(\pi\xi)}{-2i\pi\xi} \\
 &= \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} \\
 \text{et } \widehat{s}(0) &= \int_{-1/2}^{1/2} dx = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \forall \xi \in \mathbb{R}^*, \widehat{t}(\xi) &= \int_{-1}^0 (1+x)e^{-2i\pi x\xi} dx + \int_0^1 (1-x)e^{-2i\pi x\xi} dx \\
 &= \left[\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{-2i\pi\xi} (1+x) \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{e^{-2i\pi x\xi}}{-2i\pi\xi} dx + \left[\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{-2i\pi\xi} (1-x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2i\pi x\xi}}{-2i\pi\xi} (-1) dx \\
 &= \frac{1}{-2i\pi\xi} - \left[\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{(-2i\pi\xi)^2} \right]_{-1}^0 + \frac{1}{2i\pi\xi} + \left[\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{(-2i\pi\xi)^2} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1 - e^{2i\pi\xi}}{4\pi^2\xi^2} - \frac{e^{-2i\pi\xi} - 1}{4\pi^2\xi^2} \\
 &= \frac{2(1 - \cos(2\pi\xi))}{4\pi^2\xi^2} \\
 &= \left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi} \right)^2
 \end{aligned}$$

et par continuité, $\widehat{t}(0) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \widehat{t}(\xi) = 1^2 = 1$

5) $s \in \mathcal{L}$ car s est continue par morceaux donc intégrable sur le segment $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et étant nulle en dehors de ce segment, elle est intégrable sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ et sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$, donc sur \mathbb{R} . (on peut aussi dire que $s(x) = O_{x \rightarrow \pm\infty}(\frac{1}{x^2})$).

Par contre, \widehat{s} n'est pas intégrable car pour $k \in \mathbb{N}$, $\int_k^{k+1} |\widehat{s}(\xi)| d\xi \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_k^{k+1} |\sin(\pi\xi)| d\xi = \frac{\int_0^1 |\sin(\pi u)| du}{(k+1)\pi}$ par le changement de variable $\xi = u + k$.

Ainsi $\int_k^{k+1} |\widehat{s}(\xi)| d\xi \geq \frac{K}{k+1}$ où K est une constante strictement positive, comme intégrale d'une fonction continue positive non identiquement nulle.

Ainsi $\int_0^{n+1} |\widehat{s}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ comme somme partielle d'une série à termes positifs divergente. Donc \widehat{s} n'est pas intégrable sur \mathbb{R} .

Par conséquent, \widehat{s} n'appartient pas à \mathcal{L} et donc s n'appartient pas à \mathcal{W} . Donc \mathcal{W} est un sous-espace strict de \mathcal{L} , et comme $\mathcal{W}^* \subset \mathcal{W}$, il en va de même de \mathcal{W}^* .

6) L'énoncé me semble incorrect, il suffit que les f_n et f soient dans \mathcal{L} et non dans \mathcal{W} (cf question 16).

On a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|\widehat{f}_n(\xi) - \widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| dx$.

Ainsi $\|\widehat{f}_n - \widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f_n - f\|_1$, où $\|\cdot\|_{\infty}$ et $\|\cdot\|_1$ désignent respectivement les normes de la convergence uniforme et en moyenne.

Par le théorème d'encadrement, $\|\widehat{f}_n - \widehat{f}\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, autrement dit la suite (\widehat{f}_n) converge uniformément vers \widehat{f} .

B. Formule sommatoire de Poisson

7) Précisons que pour donner du sens à $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$ il faut prouver que les séries $\sum (u_n)_{n \geq 0}$ et $\sum (u_n)_{n \geq 1}$ convergent.

f appartenant à \mathcal{L}^* , il existe $\beta > 1$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |x|^\beta |f(x)| \leq M$.

Soit $K = [a, b]$ un segment de \mathbb{R} . Pour tout $x \in K$ et tout $n > -a$, $|f(x+n)| \leq \frac{M}{|x+n|^\beta} \leq \frac{M}{(a+n)^\beta}$ car $x+n \geq a+n > 0$.

Ainsi notant u_n la fonction $x \mapsto f(x+n)$ et $\|u_n\|_{\infty, K} = \sup_{x \in K} |u_n(x)|$, on a $\|u_n\|_{\infty, K} = O_{n \rightarrow \infty}(\frac{1}{n^\beta})$. Donc la série $\sum (u_n)_{n \geq 0}$ converge normalement et donc uniformément sur K et ainsi sa somme est continue sur K car les u_n le sont.

Il en va de même pour la série $\sum (u_{-n})_{n \geq 1}$ car pour $x \in K$ et $n > b$, $|u_{-n}(x)| \leq \frac{M}{(n-b)^\beta}$.

Ainsi \tilde{f} est bien définie et continue sur tout segment, donc sur \mathbb{R} .

Enfin, pour tout réel x on a :

$$\tilde{f}(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x+1+n) + \sum_{n=1}^{\infty} f(x+1-n) = \sum_{n'=1}^{\infty} f(x+n') + \sum_{n'=0}^{\infty} f(x-n') = \tilde{f}(x)$$

8) Pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_p(\tilde{f}) &= \int_0^1 \tilde{f}(x) e^{-2i\pi p x} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(f(x+n) e^{-2i\pi p x} \right) dx \quad (\text{par linéarité de la sommation}) \end{aligned}$$

Notant $v_n : x \mapsto f(x+n) e^{-2i\pi p x}$ et remarquant que dans les notations précédentes, $|v_n| = |u_n|$, la série $\sum (v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ converge normalement donc uniformément sur tout segment (c'est-à-dire que les séries $\sum (v_n)_{n \geq 0}$ et $\sum (v_{-n})_{n \geq 1}$ convergent normalement sur tout segment), et en particulier sur $[0, 1]$.

Ainsi

$$\begin{aligned} c_p(\tilde{f}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2i\pi p x} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(u) e^{-2i\pi p (u-n)} du \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(u) e^{-2i\pi p u} du \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \int_n^{n+1} f(u) e^{-2i\pi p u} du + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \int_{-n}^{-n+1} f(u) e^{-2i\pi p u} du \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{N+1} f(u) e^{-2i\pi p u} du + \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^0 f(u) e^{-2i\pi p u} du \\ &= \int_0^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi p u} du + \int_{-\infty}^0 f(u) e^{-2i\pi p u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2i\pi p u} du = \hat{f}(p) \end{aligned}$$

9) La série de terme général $g_n : x \mapsto \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$ converge normalement car comme $\hat{f} \in \mathcal{L}^*$, il existe $\beta > 1$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, |\hat{f}(n)| = O_{n \rightarrow \pm \infty}(\frac{1}{|n|^\beta})$.

Donc notant g la somme de la série $\sum (g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on a pour tout entier relatif p ,

$$c_p(g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \int_0^1 e^{2i\pi n x} e^{-2i\pi p x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \delta_{n,p} = \hat{f}(p)$$

Comme g est continue (comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues) et 1-périodique et a les mêmes coefficients de Fourier que \tilde{f} qui est continue et 1-périodique par la question 7), ces deux fonctions sont égales. Donc \tilde{f} est somme de sa série de Fourier.

En particulier,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \tilde{f}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2i\pi n 0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)$$

C. Application à la formule d'inversion de Fourier

10)

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{x,\xi}(n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_{x,\xi}(n) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)e^{-2i\pi\xi n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi x(\xi+n)} \widehat{f}(\xi+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_x(\xi+n) = \widetilde{F}_x(\xi) \end{aligned}$$

Soit $p \in \mathbb{Z}$. Comme la série $\sum (\xi \mapsto f(x+n)e^{-2i\pi\xi n} e^{-2i\pi p\xi})_{n \in \mathbb{Z}}$ converge normalement (cf question 9), on peut intégrer terme à terme sur $[0, 1]$ et en déduire

$$c_p(\widetilde{F}_x) = f(x-p)$$

Donc la formule précédente donne le développement de \widetilde{F}_x en série de Fourier.

11) On a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi &= \widehat{F}_x(0) \\ &= c_0(\widetilde{F}_x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

12) La relation précédente s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x)$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \widehat{\widehat{f}}(x)$$

ce qui prouve que \widehat{f} appartient à \mathcal{W}^* . La transformation de Fourier induit donc un endomorphisme de \mathcal{W}^* .

On a pour tout $f \in \mathcal{W}^*$, $f = \widehat{\widehat{\widehat{f}}}$.

Donc si $f \in \mathcal{W}^*$ non nulle vérifie $\widehat{f} = \lambda f$ on a $\lambda^4 f = f$ donc $\lambda^4 = 1$.

Toute valeur propre réelle de la transformation de Fourier dans \mathcal{W}^* est donc égale à 1 ou -1.

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $f = at + b\widehat{t}$.

$$\widehat{f} = a\widehat{t} + b\widehat{\widehat{t}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{f}(x) = a\widehat{t}(x) + b\widehat{\widehat{t}}(x) = a\widehat{t}(x) + bt(x) \quad \text{car } t \text{ est paire}$$

De plus t et \widehat{t} sont linéairement indépendantes : si f est nulle alors pour $x > 1$ et x non entier on obtient $t(x) = 0 \neq \widehat{t}(x)$ donc $b = 0$, puis $a = 0$ car t n'est pas la fonction nulle.

Donc pour $a = b \neq 0$, f est vecteur propre associé à la valeur propre 1, et pour $b = -a \neq 0$, f est vecteur propre associé à la valeur propre -1.

Donc 1 et -1 sont bien valeurs propres de la transformation de Fourier dans \mathcal{W}^* .

D. Application au théorème d'échantillonnage de Whittaker

13) Remarquons que \widehat{f} étant continue, elle est nulle sur $] -\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \infty[$.

Soit $\xi \in] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et $x \in \mathbb{R}$.

Dans la formule de Poisson généralisée, le membre de droite se réduit à un seul terme, d'où :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)e^{-2i\pi n\xi} = \widehat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}$$

Pour $x = 0$, on obtient :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)e^{-2i\pi n\xi} = \widehat{f}(\xi)$$

Donc \widehat{f} est uniquement déterminée par les valeurs de f sur \mathbb{Z} . Par la formule d'inversion de Fourier, f est uniquement déterminée par \widehat{f} , donc par les valeurs de f sur \mathbb{Z} .

14) Soit $g : \xi \mapsto t\left(\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) - t\left(\frac{\xi+\frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)$.

Si le premier terme n'est pas nul alors $-1 \frac{\xi-\frac{1}{2}}{\varepsilon} < 1$ c'est-à-dire $\frac{1}{2} - \varepsilon < \xi < \frac{1}{2} + \varepsilon$, et si le second terme n'est pas nul alors $-\frac{1}{2} - \varepsilon < \xi < -\frac{1}{2} + \varepsilon$

On en déduit que g n'annule en dehors de l'intervalle $]-\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon[$.

Par la question 4), $\widehat{t} : \xi \mapsto \begin{cases} \left(\frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}\right)^2 & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ appartient à \mathcal{L}^* car $\xi \mapsto \xi^2 \widehat{t}(\xi)$ est bornée (et $2 > 1$).

Ainsi $t \in \mathcal{W}^*$.

Par la question 3), les deux termes $(t_{1/\varepsilon})_{-\frac{1}{2},0}$ et $(t_{1/\varepsilon})_{\frac{1}{2},0}$ dont g est la différence appartiennent également à \mathcal{W}^* , donc il en va de même pour g car \mathcal{W}^* est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Par la formule d'inversion de Fourier, $f : x \mapsto \widehat{g}(-x)$ appartient à \mathcal{W}^* et vérifie $\widehat{f} = g$.

Soit n un entier relatif.

$$\begin{aligned} f(-n) &= \widehat{g}(n) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-2i\pi n \xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t\left(\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) e^{-2i\pi n \xi} d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} t\left(\frac{\xi+\frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) e^{-2i\pi n \xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t(u) e^{-2i\pi n(\varepsilon u + \frac{1}{2})} \varepsilon du - \int_{-\infty}^{\infty} t(u) e^{-2i\pi n(\varepsilon u - \frac{1}{2})} \varepsilon du \\ &= (-1)^n \varepsilon (\widehat{t}(n\varepsilon) - \widehat{t}(n\varepsilon)) \\ &= 0 \quad (\text{on peut aussi faire le calcul en appliquant la question 3}) \end{aligned}$$

Donc f est nulle sur \mathbb{Z} .

Or f n'est pas la fonction nulle sur \mathbb{R} car sinon $\widehat{f} = g$ serait nulle, ce qui n'est pas le cas car pour ξ strictement inférieur à et suffisamment proche de $\frac{1}{2} + \varepsilon$, le premier terme de $g(\xi)$ est non nul et le second l'est.

Donc il existe deux fonctions distinctes (f et la fonction nulle) appartenant à \mathcal{W}^* , prenant les mêmes valeurs sur \mathbb{Z} , appartenant à \mathcal{W}^* et dont les transformées de Fourier sont nulles en dehors de $[-\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon]$.

E. Contre-exemple de Katznelson

15) Soit $x \in \mathbb{Z}$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, posant $y = x - n \in \mathbb{Z}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_k(y) = t(2^k y) - t(2^{k+1} y) = \begin{cases} 0 - 0 = 0 & \text{si } y \neq 0 \text{ car alors } |y| \geq 1 \text{ donc } |2^{k+1} y| \geq |2^k y| \geq 1 \\ 1 - 1 = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $u_{k, N_k}(x) = 0$ et $f(x) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. Si $0 \neq u_k(x - n) = t(2^k(x - n)) - t(2^{k+1}(x - n))$ alors $|x - n| < \frac{1}{2^k}$.

Soit $d = \min(x - E(x), E(x) + 1 - x)$. Alors pour tout entier relatif n on a $|x - n| \geq d$ car $n \leq x$ ou $n \geq E(x) + 1$ (ainsi d est la distance de x à \mathbb{Z}). Pour k suffisamment grand ($k \geq E(\log_2(\frac{1}{d})) + 1$), tous les $u_k(x - n)$, $n \in \mathbb{Z}$ sont nuls donc $u_{k, N_k}(x)$ est nul. Donc $f(x)$ est bien défini comme somme d'une série dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang.

Sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a $E(a) = E(b)$ et notant $d = \min(a - E(a), E(a) + 1 - b)$ on a pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $|x - n| \geq d$, donc sur $[a, b]$, f est somme d'un nombre fini de termes continus donc f est continue.

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

16)

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}^*, \int_{-\infty}^{\infty} |u_{k,N}(x)| dx &\leq \frac{1}{N} \sum_{|n| < N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \int_{-\infty}^{\infty} |u_k(x-n)| dx \\
&= \frac{1}{N} \sum_{|n| < N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \int_{-\infty}^{\infty} |u_k(y)| dy \\
&= \frac{1}{N} \sum_{|n| < N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \int_{-\infty}^{\infty} |t(v) - t(2v)| \frac{dv}{2^k} \\
&= \frac{M}{2^k} \frac{1}{N} \sum_{|n| < N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \\
&= \frac{2M}{2^k}
\end{aligned}$$

avec $M = \int_{-\infty}^{\infty} |t(v) - t(2v)| dv$, car $\sum_{|n| < N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \leq \sum_{|n| < N} 1 = 2(N-1) + 1 \leq 2N$.

Donc la série de terme général $\int_{-\infty}^{\infty} |u_{k,N}(x)| dx = O\left(\frac{1}{2^k}\right)$ converge.

Par le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue, f est intégrable et on peut intégrer terme à terme. Une version plus fine mais hors-programme de ce théorème dit qu'il y a convergence en moyenne. On peut remarquer qu'on a ici une série à termes positifs donc $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - \sum_{k=0}^K u_{k,N_k}(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} (f(x) - \sum_{k=0}^K u_{k,N_k}(x)) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx - \sum_{k=0}^K \int_{\mathbb{R}} u_{k,N_k}(x) dx \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$. On peut aussi faire la preuve dans le cas général :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - \sum_{k=0}^K u_{k,N_k}(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} u_{k,N_k}(x) \right| dx$$

et comme pour $K \leq L$ on a $\int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k=K+1}^L u_{k,N_k}(x) \right| dx \leq \sum_{k=K+1}^L \int_{\mathbb{R}} |u_{k,N_k}(x)| dx$, on obtient en passant à la limite quand $L \rightarrow \infty$:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} u_{k,N_k}(x) \right| dx \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |u_{k,N_k}(x)| dx \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

donc par le théorème d'encadrement,

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} u_{k,N_k}(x) \right| dx \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

Par la question 6, comme f est dans \mathcal{L} ainsi que les u_{k,N_k} (il suffit d'avoir une série à termes et à somme dans \mathcal{L} et non dans \mathcal{W}), on en déduit que la série de terme général $\widehat{u_{k,N_k}}$ converge uniformément vers \widehat{f} .

17)

$$\begin{aligned}
\widehat{u_{k,N}}(\xi) &= \frac{1}{N} \sum_{|n| < N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \int_{\mathbb{R}} u_k(x-n) e^{-2i\pi x \xi} dx \\
&= \frac{1}{N} \sum_{|n| < N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \int_{\mathbb{R}} u_k(y) e^{-2i\pi(y+n)\xi} dy \\
&= \frac{1}{N} \sum_{|n| < N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{-2i\pi n \xi} \int_{\mathbb{R}} u_k(y) e^{-2i\pi y \xi} dy \\
&= \frac{1}{N} K_N(-\xi) \widehat{u_k}(\xi)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u_{k,N}}(\xi)| d\xi &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_p^{p+1} |\widehat{u_{k,N}}(\xi)| d\xi \\
&= \frac{1}{N} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_p^{p+1} K_N(\xi) |\widehat{u_k}(\xi)| d\xi
\end{aligned}$$

car $K_N : \xi \mapsto \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \pi N \xi}{\sin \pi \xi} \right)^2$ est à valeurs positives et paire.

Or

$$\begin{aligned} \int_p^{p+1} K_N(\xi) |\widehat{u}_k(\xi)| d\xi &\leq \sup_{[p,p+1]} |\widehat{u}_k| \int_p^{p+1} K_N(\xi) d\xi \\ &= \sup_{[p,p+1]} |\widehat{u}_k| \sum_{|n| < N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \int_p^{p+1} e^{2i\pi n \xi} d\xi \\ &= \sup_{[p,p+1]} |\widehat{u}_k| \sum_{|n| < N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \delta_{n,0} \\ &= \sup_{[p,p+1]} |\widehat{u}_k| \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}_{k,N}(\xi)| d\xi \leq \frac{1}{N} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sup_{[p,p+1]} |\widehat{u}_k|$$

le membre de droite étant bien la somme d'une série convergente car comme $u_k = t_{2^k} - t_{2^{k+1}}$ et $t \in \mathcal{W}^*$, u_k appartient à \mathcal{W}^* (par 3)) donc \widehat{u}_k appartient à \mathcal{L}^* et ainsi il existe $\alpha > 1$ tel que $\sup_{[p,p+1]} |\widehat{u}_k| = O_{p \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{|p|^\alpha} \right)$.

18) Choisissons les N_k tels que $\forall k \in \mathbb{N}$, $N_k \geq k^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{[n,n+1]} |\widehat{u}_k|$ (par exemple $N_k = E(\dots) + 1$).

On peut alors appliquer le théorème de Lebesgue et en conclure que \widehat{f} est intégrable et que la série de terme général \widehat{u}_{k,N_k} converge en moyenne (pour ce raffinement hors-programme, cf question 16) vers \widehat{f} .

Par la question 6, on en déduit que la série de terme général $\widehat{\widehat{u}_{k,N_k}}$ converge uniformément vers $\widehat{\widehat{f}}$.

Or les u_{k,N_k} sont dans \mathcal{W}^* comme combinaisons linéaires d'éléments de ce sous-espace. Donc la formule d'inversion de Fourier s'applique aux u_{k,N_k} .

Ainsi la série de terme général u_{k,N_k} converge vers $x \mapsto \widehat{\widehat{f}}(-x)$.

19) On a vu que f est nulle sur \mathbb{Z} donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = 0$.

Par ailleurs (cf question précédente), pour tout entier relatif p ,

$$\widehat{u}_{k,N}(p) = \frac{1}{N} K_N(-p) \widehat{u}_k(p)$$

et comme K_N est continue sur \mathbb{R} (combinaison linéaire de fonctions continues) et 1-périodique, $K_N(p) = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} K_N(x) = \frac{N^2}{N} = N$.

D'où $\widehat{u}_{k,N}(p) = \widehat{u}_k(p)$.

$$\widehat{f}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{u}_k(p)$$

Par la question 3,

$$\widehat{u}_k(p) = \frac{1}{2^k} \widehat{t}\left(\frac{p}{2^k}\right) - \frac{1}{2^{k+1}} \widehat{t}\left(\frac{p}{2^{k+1}}\right)$$

$$\widehat{f}(p) = \widehat{t}(p) - 0\widehat{t}(0) = \widehat{t}(p)$$

car \widehat{t} est continue et $\frac{p}{2^{k+1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(p) &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{t}(p) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} t(n) \text{ car la formule sommatoire de Poisson s'applique à } t \in \mathcal{W}^* \\ &= t(0) = 1 \text{ (on peut aussi utiliser l'expression de } \widehat{t} \text{ obtenue en 4))} \end{aligned}$$

Donc f ne vérifie pas la formule sommatoire de Poisson. Ainsi f n'appartient pas à \mathcal{W}^* .

F. Application à la resommation d'Ewald

20) Remarquons que $g \in \mathcal{L}^*$ donc, comme $\widehat{g} = g$, $g \in \mathcal{W}^*$.

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n/100)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(n/100)^2} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) - \frac{1}{2} \quad \text{avec } h = g_{\frac{1}{100}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{h}(n) - \frac{1}{2} \quad \text{car } g \in \mathcal{W}^* \text{ donc par 3), } h \in \mathcal{W}^*
 \end{aligned}$$

Par 3), $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{h}(\xi) = 100\widehat{g}(100\xi) = 100g(100\xi)$ car $\widehat{g} = g$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} 100e^{-\pi 10000n^2} - \frac{1}{2} \\
 &= 100 \frac{1}{2} (1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi 10000n^2}) - \frac{1}{2} \\
 &= 49,5 + 100 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi 10000n^2}
 \end{aligned}$$

Pour $n \geq 2$, $n^2 = 1 + (n^2 - 1) = 1 + (n-1)(n+1) \geq 1 + (n+1)$, d'où

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi 10000n^2} &= e^{-\pi 10000} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\pi 10000(n^2-1)} \right) \\
 &\leq e^{-\pi 10000} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\pi 10000(n+1)} \right) = e^{-\pi 10000} \left(1 + \frac{e^{-\pi 30000}}{1 - e^{-\pi 10000}} \right) \\
 &\leq \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right) e^{-\pi 10000} = 2e^{-\pi 10000}
 \end{aligned}$$

car $0 < e^{-\pi 30000} \leq e^{-\pi 10000} \leq e^{-1} \leq \frac{1}{2}$.

Or $e^\pi > 6,25 \times 2,5 > 12$ car $e \geq 2,5$ et $\pi \geq 3$.

Donc $e^{-\pi 10000} \leq \frac{1}{1,2^{10000}} 10^{-10000}$,

et par convexité de la fonction $x \mapsto x^{10000}$ sur \mathbb{R}_+ , on a $1,2^{10000} \geq 1 + 10000 \times 0,2 = 2001$ d'où $0 < 100 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi 10000n^2} \leq 100 \frac{2}{2001} 10^{-10000} \leq 10^{-10000}$.

Ainsi 49,5 est une valeur approchée de S à 10^{-10000} près par défaut.