X ULC Maths B 2013

1. Définition de l'exposant de Hölder ponctuel

1a

Soit $s \in [0,1]$. L'ensemble $\Gamma^s(x_0)$ est inclus dans $\mathcal{C}$ et contient la fonction nulle sur $[0,1]$.
Soient $(f,g) \in \Gamma^s(x_0)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+\lambda g$ est continue sur $[0,1]$ comme combinaison linéaire de fonctions continues sur $[0,1]$. De plus, grâce à l'inégalité triangulaire, on a

$$\forall x \in [0,1] \setminus \{x_0\}, \quad \frac{|(f+\lambda g)(x) - (f+\lambda g)(x_0)|}{|x-x_0|^s} \leq \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} + |\lambda| \frac{|g(x)-g(x_0)|}{|x-x_0|^s}$$

donc

$$\forall x \in [0,1] \setminus \{x_0\}, \quad \frac{|(f+\lambda g)(x) - (f+\lambda g)(x_0)|}{|x-x_0|^s} \leq \sup_{t \in [0,1]\setminus\{x_0\}} \frac{|f(t)-f(x_0)|}{|t-x_0|^s} + |\lambda| \sup_{t \in [0,1]\setminus\{x_0\}} \frac{|g(t)-g(x_0)|}{|t-x_0|^s}$$

Par conséquent, l'ensemble $\left\{ \dfrac{|(f+\lambda g)(x) - (f+\lambda g)(x_0)|}{|x-x_0|^s},\ x \in [0,1] \setminus \{x_0\} \right\}$ est majoré et non vide. Sa borne supérieure est donc finie i.e. $\lambda f + g \in \Gamma^s(x_0)$. Ainsi, $\Gamma^s(x_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$.

Soient $(s_1,s_2) \in [0,1]^2$ tel que $s_1 \leq s_2$ et $f \in \Gamma^{s_2}(x_0)$ alors

$$\forall x \in [0,1] \setminus \{x_0\}, \quad \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{s_1}} = \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{s_2}} |x-x_0|^{s_2-s_1}$$

Comme $s_2 - s_1 \geq 0$, la fonction $x \mapsto |x-x_0|^{s_2-s_1}$ est majorée par 1 sur le segment $[0,1]$. Par suite,

$$\forall x \in [0,1] \setminus \{x_0\}, \quad \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{s_1}} \leq \sup_{t \in [0,1]\setminus\{x_0\}} \frac{|f(t)-f(x_0)|}{|t-x_0|^{s_2}}$$

Par conséquent, l'ensemble $\left\{ \dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{s_1}},\ x \in [0,1] \setminus \{x_0\} \right\}$ est majoré et non vide. Sa borne supérieure est donc finie i.e. $f \in \Gamma^{s_1}(x_0)$, ce qui montre l'inclusion $\Gamma^{s_2}(x_0) \subset \Gamma^{s_1}(x_0)$.

Par définition, $\Gamma^0(x_0) \subset \mathcal{C}$. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{C}$ alors la fonction $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc bornée sur le segment $[0,1]$. Par suite, l'ensemble $\left\{ \dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^0},\ x \in [0,1] \setminus \{x_0\} \right\}$ est majoré et non vide, ce qui montre que $f \in \Gamma^0(x_0)$. D'où, $\Gamma^0(x_0) = \mathcal{C}$.

1b

Soit $f \in \mathcal{C}$ dérivable en x_0 alors

$$\forall x \in [0,1] \setminus \{x_0\}, \quad \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} = \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} |x-x_0|^{1-s}$$

Comme $1-s \geq 0$, la fonction $x \mapsto |x-x_0|^{1-s}$ est majorée par 1 sur le segment $[0,1]$. La fonction f étant dérivable en x_0 la fonction taux d'accroissement en x_0 définie par

$$\begin{cases} \tau_{x_0} : [0,1] \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R} \\ \qquad\qquad x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{cases}$$

est continue sur $[0,1] \setminus \{x_0\}$ et prolongeable par continuité en x_0. Elle est donc bornée sur $[0,1]$. Par suite,

$$\forall x \in [0,1] \setminus \{x_0\}, \quad \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} \leq \sup_{t \in [0,1]\setminus\{x_0\}} \frac{|f(t)-f(x_0)|}{|t-x_0|}$$

Par conséquent, l'ensemble $\left\{ \dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s},\ x \in [0,1] \setminus \{x_0\} \right\}$ est majoré et non vide. Sa borne supérieure est donc finie ce qui montre $f \in \Gamma^s(x_0)$.

1.c

Soit $x_0 \in]0,1[$. La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x - x_0|$ appartient à $\mathcal{C}$ et n'est pas dérivable en x_0. De plus, soit $s \in [0,1[$ alors

$$\forall x \in [0,1] \setminus \{x_0\}, \quad \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s} = |x - x_0|^{1-s} \leq 1$$

donc $f \in \Gamma^s(x_0)$. Il existe donc des fonctions continues sur $[0,1]$ non dérivables en x_0 mais appartenant à $\Gamma^s(x_0)$ pour tout $s \in [0,1[$.

2

Soit $x \in [0,1] \setminus \{1/2\}$ et $s \in [0,1]$, on a

$$\frac{|p(x) - p(1/2)|}{|x - 1/2|^s} = \sqrt{2(2x+1)}\ |x - 1/2|^{1/2-s}$$

Pour tout $s \in [0,1/2]$, la fonction $x \mapsto \sqrt{2(2x+1)}\,|x-1/2|^{1/2-s}$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc bornée sur $[0,1]$. Par conséquent, pour tout $s \in [0,1/2]$, $f \in \Gamma^s(x_0)$. De plus, pour tout $s \in]1/2,1[$, $\lim\limits_{x \to 1/2^+} \sqrt{2(2x+1)}\,|x-1/2|^{1/2-s} = +\infty$. L'ensemble $\left\{ \dfrac{|p(x) - p(1/2)|}{|x - 1/2|^s},\ x \in [0,1] \setminus \{1/2\} \right\}$ n'est donc pas majoré i.e. $p \notin \Gamma^s(1/2)$. Finalement, $\alpha_p(1/2) = 1/2$.

3a

Soit $(h,h') \in [0,1]^2$ tel que $h \leq h'$ alors

$$\left\{ |f(x) - f(y)|,\ (x,y) \in [0,1]^2 \ :\ |x-y| \leq h \right\} \subset \left\{ |f(x) - f(y)|,\ (x,y) \in [0,1]^2 \ :\ |x-y| \leq h' \right\}$$

donc $\omega_f(h) \leq \omega_f(h')$ ce qui prouve la croissance de ω_f sur $[0,1]$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, f est uniformément continue sur $[0,1]$ d'après le théorème de Heine. Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |x-y| \leq \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Ainsi, pour tout réel $h \in [0,1]$ tel que $|h| \leq \eta$, on a $0 \leq \omega_f(h) \leq \varepsilon$. Comme $\omega_f(0) = 0$, on a donc prouvé que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall h \in [0,1],\ |h| \leq \eta \ \Rightarrow\ 0 \leq \omega_f(h) - \omega_f(0) \leq \varepsilon$$

ce qui prouve la continuité de ω_f en 0.

3.b

Soit $(h,h') \in [0,1]^2$ tel que $h \leq h'$ et $(x,y) \in [0,1]^2$ tel que $|x-y| \leq h'$.
Si $|x-y| \leq h$ alors

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(h) \leq \omega_f(h') \leq \omega_f(h') + \omega_f(h'-h)$$

Si $|x-y| > h$ alors, par symétrie, on peut supposer que $x < y$ et on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x+h)| + |f(x+h) - f(y)|$$

Or $|x+h-y| = y - (x+h) = |x-y| - h \leq h' - h$ donc $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(h) + \omega_f(h'-h)$.
D'où,

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |x-y| \leq h' \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \omega_f(h) + \omega_f(h'-h)$$

ce qui prouve que

$$\omega_f(h') \leq \omega_f(h) + \omega_f(h'-h)$$

3.c

Soit $(h,h') \in [0,1]^2$. Si $h \leq h'$ alors la croissance de ω_f et la question précédente donnent

$$\omega_f(h) \leq \omega_f(h') \leq \omega_f(h) + \omega_f(h'-h)$$

donc

$$|\omega_f(h') - \omega_f(h)| \leq \omega_f\left(|h-h'|\right)$$

Par symétrie des rôles joués par h et h', on en déduit que

$$\forall (h,h') \in [0,1]^2, \quad |\omega_f(h') - \omega_f(h)| \leq \omega_f\left(|h-h'|\right)$$

Soit $h_0 \in [0,1]$ alors

$$\forall h \in [0,1], \quad |\omega_f(h) - \omega_f(h_0)| \leq \omega_f\left(|h-h_0|\right)$$

Comme ω_f est continue en 0 et vaut 0 en 0, on en déduit que ω_f est continue en h_0 puis que ω_f est continue sur $[0,1]$.

4.a

Par définition, $f \in \mathcal{C}$. Soit $s \in [0,1[$ et $x_0 \in [0,1]$ alors

$$\forall x \in [0,1] \setminus \{x_0\}, \quad \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} \leq \frac{\omega_f\,(|x-x_0|)}{|x-x_0|^s}$$

Donc si la fonction $h \mapsto \dfrac{\omega_f\,(h)}{h^s}$ est bornée sur $[0,1]$ alors l'ensemble $\left\{\dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s},\ x \in [0,1] \setminus \{x_0\}\right\}$ est majoré et non vide, ce qui implique que $f \in \Gamma^s(x_0)$.

4.b

Soit $x_0 \in]0,1]$ alors q est dérivable en x_0. D'après la question 1.b, on en déduit que $q \in \Gamma^s(x_0)$ pour tout $s \in [0,1[$ puis que $\alpha_q(x_0) = 1$.
Soit $s \in [0,1[$

$$\forall x \in [0,1] \setminus \{0\}, \quad \frac{|q(x)-q(0)|}{|x|^s} \leq |x|^{1-s} \leq 1$$

donc $q \in \Gamma^s(0)$ puis $\alpha_q(0) = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$q\left(\frac{1}{2n}\right) - q\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = \frac{4n+1}{2n(2n+1)}$$
$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{-1}{2n(2n+1)}$$

Donc $w_q\left(\dfrac{1}{2n(2n+1)}\right) \geq \dfrac{4n+1}{2n(2n+1)}$ puis

$$\frac{w_q\left(\dfrac{1}{2n(2n+1)}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{2n(2n+1)}}} \geq \frac{\dfrac{4n+1}{2n(2n+1)}}{\sqrt{\dfrac{1}{2n(2n+1)}}} = \frac{4n+1}{\sqrt{2n(2n+1)}}$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{4n+1}{\sqrt{2n(2n+1)}} \neq 0$$

on en déduit que la fonction $h \mapsto \dfrac{w_q(h)}{\sqrt{h}}$ ne tend pas vers zéro en zéro. La réciproque de la question précédente est donc fausse.

2. Le système de Schauder

5.a

Soit $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathcal{T}_{j+1}$. Pour tout entier k', on a

$$[k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}] \iff \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right] \subset [k', k'+1]$$
$$\iff k' \in \left[\frac{k-1}{2}, \frac{k}{2}\right]$$

Par conséquent, l'unique entier k' tel que $[k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}]$ est $k/2$ si k est pair et $(k-1)/2$ si k est impair. Dans tous les cas, il existe un unique entier k' tel que $[k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}]$. Il appartient à $\mathcal{T}_j$ et est donné par $k' = E(k/2)$.

5.b

Soit $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathcal{T}_j$ et $\ell \in \mathcal{T}_{j+1}$. D'après la question précédente, $\ell 2^{-j-1} \in [E(\ell/2)2^{-j}, ([E(\ell/2)+1)2^{-j}]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\theta_{j,k}\left(\ell 2^{-j-1}\right) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad E(\ell/2) \neq k \\ 1 - |\ell - 2E(\ell/2) - 1| & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq 2k+1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

5.c

Soit $(j,k) \in \mathcal{I}$. Par définition, la fonction $\theta_{j,k}$ est continue sur $[0, k2^{-j}[\cup]k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[\cup](k+1)2^{-j}, 1]$.
Comme $1 - |2^{j+1}k2^{-j} - 2k - 1| = 1 - |2^{j+1}(k+1)2^{-j} - 2k - 1| = 0$, la fonction $\theta_{j,k}$ est continue sur $[0,1]$.
Soit $n > j$ et $\ell \in \mathcal{T}_n$ alors, en utilisant le résultat précédent, il existe un unique entier ℓ' tel que

$$[\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}] \subset [\ell' 2^{-j-1}, (\ell'+1)2^{-j-1}] \subset [E(\ell'/2)2^{-j}, ([E(\ell'/2)+1)2^{-j}]$$

Ainsi,

$$\forall x \in [\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}], \quad \theta_{j,k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } E(\ell'/2) \neq k \\ 1 - |2^{j+1}x - \ell' - 1| = 2^{j+1}x - \ell' & \text{si } \ell' = 2k \\ 1 - |2^{j+1}x - \ell' - 1| = 1 + \ell' - 2^{j+1}x & \text{si } \ell' = 2k+1 \end{cases}$$

La fonction $\theta_{j,k}$ est donc affine sur l'intervalle $[\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}]$.

5.d

Montrons que si une fonction f est k_1-lipschitzienne sur $[a,b]$ et k_2-lipschitzienne sur $[b,c]$, elle est k-lipschitzienne sur $[a,c]$ avec $k = \max(k_1, k_2)$.
En effet, soit $(x,y) \in [a,c]^2$. Si $(x,y) \in [a,b]^2 \cup [b,c]^2$ alors

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$

Sinon, par symétrie des rôles joués par x et y, on peut supposer que $x \leq b \leq y$. On a alors

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(b)| + |f(b) - f(y)| \leq k|x-b| + k|b-y| = k|x-y|$$

Soient $(j,k) \in \mathcal{I}$. La fonction $\theta_{j,k}$ est constante sur $[0, k2^{-j}] \cup [(k+1)2^{-j}, 1]$ donc 0-lipschitzienne sur ces intervalles. La fonction $\theta_{j,k}$ est affine sur les intervalles $([2k2^{-j-1}, (2k+1)2^{-j-1}]$ et $([(2k+1)2^{-j-1}, (2k+2)2^{-j-1}]$ de pentes respectives 2^{j+1} et -2^{j+1} donc 2^{j+1}-lipschitzienne sur ces intervalles.
En appliquant le résultat précédent, on en déduit que la fonction $\theta_{j,k}$ est 2^{j+1}-lipschitzienne sur $[0,1]$ i.e.

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)| \leq 2^{j+1}|x-y|$$

6

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, le théorème de Heine implique que f est uniformément continue sur $[0,1]$, il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-N} \leq \eta$, alors

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad j \geq N \Rightarrow \left(\forall k \in \mathcal{T}_j,\ |c_{j,k}(f)| \leq \frac{1}{2}\left|f\left((k+1/2)2^{-j}\right) - f(k2^{-j})\right| + \frac{1}{2}\left|f\left((k+1/2)2^{-j}\right) - f\left((k+1)2^{-j}\right)\right| \leq \varepsilon\right)$$

donc

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad j \geq N \Rightarrow \max_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \leq \varepsilon$$

Par conséquent, $\lim\limits_{j \to +\infty} \max\limits_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| = 0$.

7.a

Soient $(j,k) \in \mathcal{I}$ et $(i,\ell) \in \mathcal{I}$.
– Si $j > i$ alors la fonction $\theta_{i,\ell}$ est affine sur l'intervalle $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ donc $c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = 0$.

– Supposons $j \leq i$ alors $\theta_{i,\ell}\left(k2^{-j}\right) = \theta_{i,\ell}\left(k2^{i+1-j}2^{-i-1}\right) = 0$ d'après la question 5.b car $k2^{i+1-j} \neq 2\ell+1$ (l'un est pair et l'autre pas). De même, $\theta_{i,\ell}\left((k+1)2^{-j}\right) = \theta_{i,\ell}\left((k+1)2^{i+1-j}2^{-i-1}\right) = 0$.
  Enfin, $\theta_{i,\ell}\left((k+1/2)2^{-j}\right) = \theta_{i,\ell}\left((2k+1)2^{i-j}2^{-i-1}\right)$. Or, $(2k+1)2^{i-j} = 2\ell+1$ si et seulement si $i=j$ et $k=\ell$.

Par suite, $c_{j,k}\left(\theta_{i,\ell}\right) = \delta_{i,j}\delta_{k,\ell}$.

7.b

Montrons que la série de fonctions $\sum f_j^a$ est normalement convergente sur $[0,1]$ ce qui prouvera qu'elle converge uniformément sur $[0,1]$.
Soit $j \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$ alors

$$\left|f_j^a(x)\right| \leq b_j \sum_{k\in\mathcal{T}_j} \theta_{j,k}(x)$$

et comme les fonctions $(\theta_{j,k})_{k\in\mathcal{T}_j}$ sont à support disjoints et majorées par 1, on en déduit que $\left|f_j^a(x)\right| \leq b_j$. La série $\sum b_j$ étant supposée convergente, on en déduit la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_j^a$. On note f^a sa limite.
la fonction f^a est continue puisqu'elle est limite uniforme de fonctions continues. La convergence uniforme impliquant la convergence simple en 0 et en 1, la fonction f^a s'annule en 0 et en 1. Elle appartient donc à $\mathcal{C}_0$.
Soit $(j,k) \in \mathcal{I}$. Pour tout couple de fonctions continues sur $[0,1]$, (f,g), on a $|c_{j,k}(f) - c_{j,k}(g)| \leq 2\|f-g\|_\infty$. La convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_j^a$ vers f^a implique

$$c_{j,k}\left(f^a\right) = \lim_{N\to+\infty} c_{j,k}\left(\sum_{j'=0}^{N}\sum_{k'\in\mathcal{T}_{j'}} a_{j',k'}\theta_{j',k'}\right)$$

En utilisant la linéarité de $c_{j,k}$, on obtient

$$c_{j,k}\left(f^a\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j'=0}^{N}\sum_{k'\in\mathcal{T}_{j'}} a_{j',k'}c_{j,k}\left(\theta_{j',k'}\right) = a_{j,k}$$

8.a

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ alors f' est bornée sur $[0,1]$. On pose $M_1 = \|f'\|_\infty$. Soit $(j,k) \in \mathcal{I}$ alors le théorème des accroissements finis donne

$$\left|f\left((k+1/2)2^{-j}\right) - f\left(k2^{-j}\right)\right| \leq 2^{-j-1}M_1 \quad \text{et} \quad \left|f\left((k+1/2)2^{-j}\right) - f\left((k+1)2^{-j}\right)\right| \leq 2^{-j-1}M_1$$

Par inégalité triangulaire, on en déduit que $|c_{j,k}(f)| \leq 2^{-j-1}M_1$. On pose donc $M = M_1/2$ pour obtenir que

$$\forall (j,k) \in \mathcal{I}, \quad c_{j,k}(f) \leq M2^{-j}$$

Si, pour tout entier j, on pose $b_j = \max_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|$ alors, pour tout entier j, $b_j \leq M2^{-j}$.
La série à termes positifs $\sum b_j$ est donc convergente. D'après la question 7.b, on en déduit que la série de fonction $\sum g_j$ avec, pour tout entier j, $g_j = \sum_{k\in\mathcal{T}_j} c_{j,k}\theta_{j,k}$, converge uniformément i.e. que la suite de fonction $(S_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

8.b

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ alors f'' est bornée sur $[0,1]$. On pose $M_2 = \|f'\|_\infty$. Soit $(j,k) \in \mathcal{I}$ alors l'inégalité de Taylor-Lagrange donne

$$\left|f\left(k2^{-j}\right) - f\left((k+1/2)2^{-j}\right) + 2^{-j-1}f'\left((k+1/2)2^{-j}\right)\right| \leq \frac{4^{-j-1}}{2}M_2$$

et

$$\left|f\left((k+1)2^{-j}\right) - f\left((k+1/2)2^{-j}\right) - 2^{-j-1}f'\left((k+1/2)2^{-j}\right)\right| \leq \frac{4^{-j-1}}{2}M_2$$

Par inégalité triangulaire, on en déduit que $|c_{j,k}(f)| \leq 4^{-j}2^{-3}M_2$. On pose donc $M' = 2^{-3}M_2$ pour obtenir que

$$\forall (j,k) \in \mathcal{I}, \quad |c_{j,k}(f)| \leq M'4^{-j}$$

9.a

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$ alors $S_n(f)$ est une combinaison linéaire de fonction affines sur l'intervalle $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$ d'après la question 5.c. Par conséquent, la fonction $S_n(f)$ est affine sur l'intervalle $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$.

9.b

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\ell \in \mathcal{T}_n$, $S_{n-1}f(\ell 2^{-n}) = f(\ell 2^{-n})$. Soit $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$.

– Si ℓ est pair, alors pour tout $k \in \mathcal{T}_n$, $\ell \neq 2k+1$ donc $\theta_{n,k}(\ell 2^{-n-1}) = 0$. Ainsi, en posant $\ell = 2p$, on a

$$S_n f(\ell 2^{-n-1}) = S_{n-1}f(p2^{-n}) + \sum_{k \in \mathcal{T}_n} c_{n,k}(f)\theta_{n,k}(\ell 2^{-n-1}) = f(p2^{-n}) = f(\ell 2^{-n-1})$$

– Si ℓ est impair, alors il existe $p \in \mathcal{T}_n$ tel que $\ell = 2p+1$. Pour tout $k \in \mathcal{T}_n$, $\theta_{n,k}(\ell 2^{-n-1}) = \delta_{k,p}$ donc

$$S_n f(\ell 2^{-n-1}) = S_n f\left((2p+1)2^{-n-1}\right) = S_{n-1}f\left((2p+1)2^{-n-1}\right) + \sum_{k \in \mathcal{T}_n} c_{n,k}(f)\theta_{n,k}(\ell 2^{-n-1}) = S_{n-1}f\left((2p+1)2^{-n-1}\right) + c_{n,p}(f)$$

Comme $S_{n-1}f$ est affine sur l'intervalle $[p2^{-n}, (p+1)2^{-n}]$,

$$S_{n-1}f\left((2p+1)2^{-n-1}\right) = \frac{1}{2}\left(S_{n-1}f(p2^{-n}) + S_{n-1}f\left((p+1)2^{-n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(f(p2^{-n}) + f\left((p+1)2^{-n}\right)\right)$$

Par conséquent,

$$S_n f(\ell 2^{-n-1}) = \frac{1}{2}\left(f(p2^{-n}) + f((p+1)2^{-n})\right) + c_{n,p}(f) = f\left((p+1/2)2^{-n}\right) = f(\ell 2^{-n-1})$$

Finalement, pour tout $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$, $S_n f(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$.

9.c

Pour tout entier n, on note $H(n)$ l'assertion "$\forall \ell \in \mathcal{T}_{n+1}$, $S_n f(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$".
D'après la question précédente, pour tout entier n, $H(n)$ implique $H(n+1)$. Il suffit donc de prouver $H(0)$ pour conclure par récurrence. Or, on a

$$S_0 f(0) = c_{0,0}(f)\theta_{0,0}(0) = 0 = f(0)$$

et

$$S_0 f(2^{-1}) = c_{0,0}(f)\theta_{0,0}(2^{-1}) = c_{0,0}(f) = f(1/2)$$

Ainsi, $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \ell \in \mathcal{T}_{n+1}, \quad S_n f(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$$

10.a

Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{C}_0$. Comme f est uniformément continue sur $[0,1]$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-N} \leq \eta$, soit $n \geq N$ et $x \in [0,1]$. Il existe $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$ tel que $x \in [\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$, donc

$$S_n f(x) - f(x) = S_n f(x) - S_n f\left(\ell 2^{-n-1}\right) + S_n f\left(\ell 2^{-n-1}\right) - f\left(\ell 2^{-n-1}\right) + f\left(\ell 2^{-n-1}\right) - f(x)$$

Or, on a $S_n f\left(\ell 2^{-n-1}\right) = f\left(\ell 2^{-n-1}\right)$ et $\left|f\left(\ell 2^{-n-1}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon$.
De plus, $S_n f$ est affine sur $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$ donc

$$S_n f(x) - S_n f\left(\ell 2^{-n-1}\right) = 2^{n+1}\left(x - \ell 2^{-n-1}\right)\left(S_n f\left((\ell+1)2^{-n-1}\right) - S_n f\left(\ell 2^{-n-1}\right)\right)$$

puis

$$S_n f(x) - S_n f\left(\ell 2^{-n-1}\right) = 2^{n+1}\left(x - \ell 2^{-n-1}\right)\left(f((\ell+1)2^{-n-1}) - f\left(\ell 2^{-n-1}\right)\right)$$

Comme $2^{n+1}\left|x - \ell 2^{-n-1}\right| \leq 1$ et $\left|f((\ell+1)2^{-n-1}) - f\left(\ell 2^{-n-1}\right)\right| \leq \varepsilon$, on en déduit que $|S_n f(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$.
On a donc trouvé un rang N tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow (\forall x \in [0,1], \ |S_n f(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon)$$

ce qui prouve que la suite $(S_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

10.b

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme les fonctions $c_{j,k}$ sont linéaires pour tout $(k,j) \in \mathcal{I}$, S_n est linéaire comme combinaison linéaire d'applications linéaires.

Soit $f \in \mathcal{C}_0$ alors $S_n f$ est continue sur $[0,1]$ comme combinaison linéaire de fonctions continues sur $[0,1]$ et

$$S_n f(0) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f)\theta_{j,k}(0) = 0 \quad \text{et} \quad S_n f(1) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f)\theta_{j,k}(1) = 0$$

donc $S_n f \in \mathcal{C}_0$. De plus,

$$S_n(S_n f) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(S_n f)\theta_{j,k}$$

Soit $(j,k) \in \mathcal{I}$ alors par linéarité de $c_{j,k}$, $c_{j,k}(S_n f) = \displaystyle\sum_{j'=0}^{n} \sum_{k' \in \mathcal{T}_j} c_{j',k'}(f) c_{j,k}(\theta_{j',k'}) = c_{j,k}(f)$.

D'où,

$$S_n(S_n f) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f)\theta_{j,k} = S_n f$$

ce qui prouve que S_n est un projecteur dont l'image est incluse dans $\mathcal{C}_0$.

Si on prend $f = \theta_{0,0}$ alors $S_n f = f$ donc la norme subordonnée à S_n est supérieure ou égale à 1.
Soit $f \in \mathcal{C}_0$. Comme la fonction $S_n f$ est continue et affine par morceaux de subdivision adaptée $\left(k2^{-n-1}\right)_{k \in [\![0,2^{n+1}]\!]}$. Elle atteint ses bornes en un point de cette subdivision. Or, en ces points, elle coïncide avec f donc $\|S_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.
Ainsi, la norme subordonnée à S_n est égale à 1.

11.a

Soit $s \in]0,1[$. La fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^s$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f''(x) = s(s-1)x^{s-2} \geq 0$$

donc f est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par conséquent, pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on a

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^s \geq \frac{a^s + b^s}{2}$$

ce qui implique $(a+b)^s \geq 2^{s-1}(a^s + b^s)$. Comme le résultat est conservé si a ou b est nul, on en déduit que

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad a^s + b^s \leq 2^{1-s}(a+b)^s$$

11.b

Soit $f \in \Gamma^s(x_0) \cap \mathcal{C}_0$. Par définition, il existe une constante M telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x) - f(x_0)| \leq M\,|x - x_0|^s$$

Soit $(j,k) \in \mathcal{I}$ alors

$$c_{j,k}(f) = f\left((k+1/2)2^{-j}\right) - f(x_0) - \frac{1}{2}\left(f\left(k2^{-j}\right) - f(x_0)\right) - \frac{1}{2}\left(f\left((k+1)2^{-j}\right) - f(x_0)\right)$$

donc

$$|c_{j,k}(f)| \leq M\left|(k+1/2)2^{-j} - x_0\right|^s + \frac{M}{2}\left|k2^{-j} - x_0\right|^s + \frac{M}{2}\left|(k+1)2^{-j} - x_0\right|^s$$

Or, la croissance de la fonction $x \mapsto x^s$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et une inégalité triangulaire donnent

$$\left|(k+1/2)2^{-j} - x_0\right|^s \leq \left(\left|k2^{-j} - x_0\right| + 2^{-j-1}\right)^s$$

D'autre part,

$$\left|k2^{-j} - x_0\right|^s + \left|(k+1)2^{-j} - x_0\right|^s \leq 2^{1-s}\left(\left|k2^{-j} - x_0\right| + \left|(k+1)2^{-j} - x_0\right|\right)^s \leq 2^{1-s}\left(2\left|k2^{-j} - x_0\right| + 2^{-j}\right)^s$$

donc

$$\left|k2^{-j} - x_0\right|^s + \left|(k+1)2^{-j} - x_0\right|^s \leq 2\left(\left|k2^{-j} - x_0\right| + 2^{-j-1}\right)^s$$

Ainsi, en posant $c_1 = 2M$, on obtient

$$|c_{j,k}(f)| \leq c_1\left(\left|k2^{-j} - x_0\right| + 2^{-j}\right)^s$$

3. Minoration de l'exposant de Hölder ponctuel

12

Soit $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\begin{aligned} 2^{-n-1} < |x - x_0| \leq 2^{-n} &\Leftrightarrow -(n+1)\ln 2 < -\ln(|x-x_0|) \leq -n \ln 2 \\ &\Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(|x-x_0|)}{\ln 2} < n+1 \end{aligned}$$

Par unicité de la partie entière, il existe un unique $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-n_0-1} < |x - x_0| \leq 2^{-n_0}$ donné par

$$n_0 = E\left(-\frac{\ln(|x-x_0|)}{\ln 2}\right)$$

13

Soit $j \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathcal{T}_j$, la fonction $\theta_{k,j}$ est à support dans $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$. Ainsi, $\theta_{k,j}(x)$ est nul si $k \neq \tilde{k}_j(x)$ et $\theta_{k,j}(x_0)$ est nul si $k \neq \tilde{k}_j(x_0)$. Par conséquent,

$$W_j \leq |c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| \left|\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x) - \theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x_0)\right| + |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \left|\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x) - \theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x_0)\right|$$

(avec égalité si $\tilde{k}_j(x) \neq \tilde{k}_j(x_0)$).

Or, d'après la question 5.d, pour tout $k \in \mathcal{T}_j$, $|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \leq 2^{j+1}|x - x_0|$ donc

$$W_j \leq \left(\left|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)\right| + \left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right|\right) 2^{j+1}|x - x_0|$$

14.a

Soit $j \leq n_0$. Par hypothèse,

$$\left|c_{j,\tilde{k}_j(x)}\right| + \left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right| \leq c_1 \left(\left|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0\right| + 2^{-j}\right)^s + c_1 \left(\left|\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0\right| + 2^{-j}\right)^s$$

Or,

$$\left|\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0\right| \leq 2^{-j} \quad \text{et} \quad \left|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0\right| \leq \left|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x\right| + |x - x_0| \leq 2^{-j} + |x - x_0|$$

donc

$$\left|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)\right| + \left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right| \leq c_1 \left(|x - x_0| + 2^{-j+1}\right)^s + c_1 \left(2^{-j+1}\right)^s \leq c_1 2^{1-s} \left(|x - x_0| + 2^{-j+2}\right)^s$$

Comme $|x - x_0| \leq 2^{-n_0} \leq 2^{-j}$, on en déduit que

$$\left|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)\right| + \left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right| \leq c_1 2^{1-s} \left(2^{-j} + 2^{-j+2}\right)^s \leq c_1 2^{1-s} \left(2^{-j+1} + 2^{-j+2}\right)^s = c_1 2^{1-s} 2^{(-j+1)s} 3^s$$

donc $\left(\left|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)\right| + \left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right|\right) 2^{j+1} \leq c_1 2^{1-s} 2^{(-j+1)s} 3^s 2^{j+1} = 4c_1 2^{(1-s)j} 3^s$. Par suite,

$$W_j \leq 4c_1 2^{(1-s)j} 3^s |x - x_0|$$

14.b

D'après la question précédente

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} \left|c_{j,\tilde{k}}(f)\right| |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| &= \sum_{j=0}^{n_0} W_j \\ &\leq \sum_{j=0}^{n_0} 4c_1 2^{(1-s)j} 3^s |x - x_0| \\ &\leq 4c_1 3^s |x - x_0| \frac{1 - 2^{(1-s)(n_0+1)}}{1 - 2^{(1-s)}} \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} \left|c_{j,\tilde{k}}(f)\right| |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \leq 4c_1 3^s |x - x_0| \frac{2^{(1-s)(n_0+1)}}{2^{(1-s)} - 1}$$

et comme $2^{n_0} \leq |x-x_0|^{-1}$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n_0}\sum_{k\in\mathcal{T}_j}\left|c_{j,\tilde{k}}(f)\right|\left|\theta_{j,k}(x)-\theta_{j,k}(x_0)\right| &\leq 4c_1 3^s|x-x_0|\frac{2^{(1-s)}|x-x_0|^{s-1}}{2^{(1-s)}-1}\\ &\leq 8c_1(3/2)^s|x-x_0|^s\frac{1}{2^{(1-s)}-1}\\ &\leq c_2|x-x_0|^s\end{aligned}$$

15

Soit $j \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, $\left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right| \leq c_1\left(\left|\tilde{k}_j(x_0)2^{-j}-x_0\right|+2^{-j}\right)^s$.

Or, $\left|\tilde{k}_j(x_0)2^{-j}-x_0\right| \leq 2^{-j}$ donc $\left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right| \leq c_1 2^{s(1-j)}$.

Pour tout $k \in \mathcal{T}_j$, $\theta_{j,k}(x_0)$ est nul si $k \neq \tilde{k}_j(x_0)$ donc

$$\sum_{k\in\mathcal{T}_j}|c_{j,k}(f)|\left|\theta_{j,k}(x_0)\right| = \left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right|\left|\theta_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(x_0)\right| \leq \left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right| \leq c_1 2^{s(1-j)}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{j=n_0+1}^{\infty}\sum_{k\in\mathcal{T}_j}|c_{j,k}(f)|\left|\theta_{j,k}(x_0)\right| &\leq c_1\sum_{j=n_0+1}^{\infty}2^{s(1-j)}\\ &\leq c_1 2^{-sn_0}\frac{1}{1-2^{-s}}\\ &\leq c_1 2^{-s(n_0+1)}\frac{2^s}{1-2^{-s}}\\ &\leq c_1\frac{2^s}{1-2^{-s}}|x-x_0|^s = c_3|x-x_0|^s\end{aligned}$$

16

On définit l'ensemble E de la manière suivante :

$$E = \{n \in \mathbb{N} : \omega_f(2^{-n}) \geq 2^{-n_0 s}\}$$

- La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle atteint ses bornes. Comme $\|f\|_\infty = 1$, il existe $x \in [0,1]$ tel que $|f(x)| = 1$. De plus, f s'annule en 0. On en déduit donc que $\omega_f(1) \geq 1$, ce qui montre que l'ensemble E est non vide.
- Comme ω_f est continue en 0, on a
$$\lim_{n\to+\infty}\omega_f(2^{-n}) = \omega_f(0) = 0$$
ce qui montre que l'ensemble E est majoré.

L'ensemble E est donc une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée. Elle possède donc un élément maximal que l'on note n_1. Comme la fonction ω_f est croissante, on a donc $E = [\![0, n_1]\!]$.

Comme $n_1 + 1 \notin E$, l'entier n_1 vérifie bien

$$\omega_f(2^{-n_1-1}) < 2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n_1})$$

Enfin, si un autre entier n_2 vérifie la même égalité, alors $n_2 \in [\![0, n_1]\!]$ et $n_2 + 1 \notin [\![0, n_1]\!]$ donc $n_2 = n_1$. Par suite, l'entier n_1 est unique.

17

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. Il existe $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$ tel que $x \in [\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$ donc

$$S_n f(x) - f(x) = S_n f(x) - S_n f\left(\ell 2^{-n-1}\right) + S_n f\left(\ell 2^{-n-1}\right) - f\left(\ell 2^{-n-1}\right) + f\left(\ell 2^{-n-1}\right) - f(x)$$

Or, $S_n f\left(\ell 2^{-n-1}\right) = f\left(\ell 2^{-n-1}\right)$ et $\left|f\left(\ell 2^{-n-1}\right) - f(x)\right| \leq \omega_f\left(2^{-n-1}\right)$.

Comme $S_n f$ est affine sur l'intervalle $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$,

$$\left|S_n f(x) - S_n f\left(\ell 2^{-n-1}\right)\right| \leq \left|S_n f((\ell+1)2^{-n-1}) - S_n f\left(\ell 2^{-n-1}\right)\right| = \left|f((\ell+1)2^{-n-1}) - f\left(\ell 2^{-n-1}\right)\right| \leq \omega_f\left(2^{-n-1}\right)$$

Ainsi, si $n \geq n_1$ alors

$$|S_n f(x) - f(x)| \leq 2\omega_f\left(2^{-n-1}\right) \leq 2 \times 2^{-n_0 s} = 2^{1+s}2^{(-n_0-1)s} \leq 2^{1+s}|x-x_0|^s$$

donc $\|f - S_n f\|_\infty \leq 2^{1+s}|x - x_0|^s$.

18.a

Soit $j \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathcal{T}_j$, $\theta_{j,k}(x)$ est nul si $k \neq \tilde{k}_j(x)$ donc

$$\sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\, |\theta_{j,k}(x)| = \left|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)\right| \left|\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x)\right| \leq \left|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)\right| \leq c_1 \left(\left|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0\right| + 2^{-j}\right)^s$$

Or, $\left|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0\right| \leq \left|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x\right| + |x - x_0| \leq 2^{-j} + |x - x_0|$ d'où

$$\sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\, |\theta_{j,k}(x)| \leq c_1 \left(2^{1-j} + |x - x_0|\right)^s$$

Si $j \geq n_0 + 1$ alors $2^{-j} \leq 2^{-n_0-1} \leq |x - x_0|$. Ainsi,

$$\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\, |\theta_{j,k}(x)| \leq c_1 3^s |x - x_0|^s (n_1 - n_0)$$

18.b

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, $\omega_f\left(2^{-n_1}\right) \leq c_4(N)(1 + n_1)^{-N}$ donc, par décroissance de la fonction $x \mapsto x^{-1/N}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$$n_1 - n_0 \leq 1 + n_1 \leq \left(\frac{c_4(N)}{\omega_f\left(2^{-n_1}\right)}\right)^{1/N}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\, |\theta_{j,k}(x)| &\leq c_1 3^s c_4(N)^{1/N} |x - x_0|^s \left(2^{n_0 s}\right)^{1/N} \\
&\leq c_1 3^s c_4(N)^{1/N} |x - x_0|^s |x - x_0|^{-s/N} \\
&\leq c_5(N) |x - x_0|^{s(1-1/N)}
\end{aligned}$$

19

Comme $f(x) - f(x_0) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f)\left(\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)\right)$, les estimations précédentes conduisent à

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c_2 |x - x_0|^s + c_3 |x - x_0|^s + \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\, |\theta_{j,k}(x)|$$

Si $n_0 < n_1$ alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\, |\theta_{j,k}(x)| &\leq c_5(N) |x - x_0|^{s(1-1/N)} + \|f - S_{n_1} f\|_\infty \\
&\leq c_5(N) |x - x_0|^{s(1-1/N)} + 2^{1+s} |x - x_0|^s
\end{aligned}$$

On en déduit que $f \in \Gamma^{s(1-1/N)}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ donc $\alpha_f(x_0) \geq s$.
Si $n_1 \leq n_0$ alors

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\, |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \\
&\leq \|f - S_{n_0} f\|_\infty + \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\, |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)|
\end{aligned}$$

et en utilisant les estimations précédentes

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2^{1+s} |x - x_0|^s + c_2 |x - x_0|^s$$

donc $f \in \Gamma^s$ puis $\alpha_f(x_0) \geq s$.