

# Centrale PSI 2 un corrigé

## Remarque préliminaire.

$M_p(\mathbb{K})$  est un espace de dimension finie où toutes les normes sont équivalentes. Si  $(A_n)$  est une suite d'éléments de  $M_p(\mathbb{K})$ , on n'a pas besoin de préciser la norme quand on parle de convergence de  $(A_n)$ . En particulier, si on choisit la "norme infinie relative à la base canonique", la convergence équivaut à la convergence coordonnée par coordonnée.

## 1 Question préliminaire.

- A. Soit  $z' = 1 + \frac{z}{n}$ ; on a  $|z'|^2 = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}$  et on distingue plusieurs cas.
- Si  $(a, b) = (-n, 0)$  alors  $(1 + z/n)^n = 0$  est de module nul mais on ne définit pas son argument (ou, alternativement, son argument est quelconque).
  - Si  $a = -n$  et  $b > 0$  alors  $(1 + \frac{z}{n})^n = \left(\frac{b}{n}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{2}}$ . Comme  $\left(\frac{b}{n}\right)^n > 0$ , c'est la forme géométrique (avec le module et l'argument).
  - Si  $a = -n$  et  $b < 0$  on écrit de même  $(1 + \frac{z}{n})^n = \left(\frac{-b}{n}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{2}}$ . Comme  $\left(\frac{-b}{n}\right)^n > 0$ , c'est la forme géométrique (avec le module et l'argument).
  - Sinon, on a  $z' = |z'|e^{i\theta_n}$  avec  $\tan(\theta_n) = \frac{b}{n+a}$  et  $(1 + \frac{z}{n})^n = |z'|^n e^{in\theta_n}$ . Pour expliciter  $\theta_n$ , on doit encore distinguer deux cas selon le signe de la partie réelle de  $z'$ .
    - Si  $a > -n$  alors  $\theta_n = \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right)$ .
    - Si  $a < -n$  alors  $\theta_n = \pi + \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right)$ .

- B.  $a, b$  étant fixé, pour  $n$  assez grand on a  $a > -n$ . Ainsi, en posant  $r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}}$  et  $\theta_n = \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right)$  on a

$$\exists n_0 / \forall n \geq n_0, \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n e^{in\theta_n}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} r_n^n &= \left(1 + \frac{2a}{n} + O(1/n^2)\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{2a}{n} + O(1/n^2)\right)\right) \\ &= \exp(a + O(1/n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(a) \end{aligned}$$

$$n\theta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{bn}{a+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^a e^{ib} = e^z$$

## 2 Matrices antisymétriques réelles d'ordre 2 ou 3.

- A.1 On pose  $\beta_n = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}$ .  $\beta_n$  est élément de  $\mathbb{R}^{+*}$ . De plus  $\frac{1}{\beta_n} \left(I_2 + \frac{A}{n}\right)$  a ses deux colonnes normées et orthogonales et est donc dans  $O_2(\mathbb{R})$ . Comme son déterminant vaut 1, c'est même un élément de  $SO_2(\mathbb{R})$  :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}} \left(I_2 + \frac{1}{n}A\right) \in SO_2(\mathbb{R})$$

A.2 Comme  $(1/\beta_n, \frac{\alpha}{n\beta_n})$  est sur le cercle unité, il existe un unique  $\theta_n \in ]-\pi, \pi]$  tel que

$$\cos(\theta_n) = \frac{1}{\beta_n} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_n) = \frac{\alpha}{n\beta_n}$$

et on a alors

$$\frac{1}{\beta_n} \left( I_2 + \frac{1}{n} A \right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}$$

Comme  $\frac{1}{\beta_n} > 0$ , on peut affirmer (comme en question 1.A) que

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{\alpha}{n}\right)$$

A.3 On a alors (la composée de  $n$  rotations d'angle  $\theta$  étant la rotation d'angle  $n\theta$ )

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left( I_2 + \frac{A}{n} \right)^n = \beta_n^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}$$

Or,  $\beta_n^n = \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2} \ln(1 + O(1/n^2))\right) = \exp(O(1/n)) \rightarrow 1$  et  $n\theta_n \sim n \frac{\alpha}{n} \rightarrow \alpha$ . Ainsi

$$E(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( I_2 + \frac{A}{n} \right)^n = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

C'est la matrice de rotation d'angle  $\alpha$ .

B.1  $B$  est une matrice antisymétrique d'ordre 3.

a) On a  $\det(B) = \det({}^t B) = \det(-B) = (-1)^3 \det(B) = -\det(B)$  et donc

$$\det(B) = 0$$

b) Soit  $x \in \ker(u_B)^\perp$ . On a

$$\forall y \in \ker(u_B), \quad (u_B(x)|y) = {}^t(Bx)y = {}^t x {}^t B y = -{}^t x (By) = 0$$

et  $u_B(x)$  est donc dans  $\ker(u_B)^\perp$ . On a montré que

$$u_B(\ker(u_B)^\perp) \subset \ker(u_B)^\perp$$

c)  $B$  n'étant pas inversible, elle est de rang  $\leq 2$ . Supposons, par l'absurde, qu'elle soit de rang 1 ; par théorème du rang,  $\ker(u_B)$  est alors de dimension 2 et son orthogonal est donc de dimension 1. Notons  $(e)$  une base  $\ker(u_B)^\perp$ . La stabilité prouvée ci-dessus indique qu'il existe un scalaire  $\lambda$  tel que  $u_B(e) = \lambda e$ . Calculons alors  ${}^t e B e = \lambda \|e\|^2$  ; cette quantité qui est réelle est égale à sa transposée et

$$\lambda \|e\|^2 = {}^t ({}^t e B e) = {}^t e {}^t B e = -{}^t e B e = -\lambda \|e\|^2$$

Comme  $\|e\| \neq 0$ , on obtient que  $\lambda = 0$  et donc  $e \in \ker(u_B)$ .  $e$  doit être dans le noyau et son orthogonal et est non nul : c'est une contradiction.

Finalement

$$\text{rg}(B) \in \{0, 2\}$$

B.2 Si  $B = 0$  alors le résultat demandé est immédiat avec  $\beta = 0$  et  $P = I_3$ . Sinon,  $B$  est de rang 2 et son noyau est de dimension 1. Notons  $e_1$  un vecteur normé de ce noyau et complétons en une b.o.n.  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .  $(e_2, e_3)$  est une base de  $\ker(u_B)^\perp$  et cet espace est stable par  $u_B$ . On en déduit que dans  $\mathcal{B}$ ,  $u_B$  est représentée par une matrice du type  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$  où  $B' \in M_2(\mathbb{R})$ . En notant  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{B}$ , on a

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

Comme  $P$  est orthogonale (matrice de passage entre b.o.n.),  $P^{-1} = {}^tP$  et l'antisymétrie de  $B$  entraîne celle de  $B'$  qui est donc du type  $\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ . On a ainsi (dans tous les cas)

$$\exists P \in O_3(\mathbb{R}), \exists \beta \in \mathbb{R} / B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

B.3 Comme  $\text{Tr}(UV) = \text{Tr}(VU)$ , on a alors  $\text{Tr}(PMP^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}PM) = \text{Tr}(M)$  et

$$\|B\|_2^2 = -\text{Tr}(B^2) = -\text{Tr} \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}^2 \right) = -\text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 \end{pmatrix} = 2\beta^2$$

ou encore

$$|\beta| = \frac{\|B\|_2}{\sqrt{2}}$$

B.4 On a tout d'abord

$$I_3 + \frac{1}{n}B = P \left( I_3 + \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \right) P^{-1}$$

Comme  $(PMP^{-1})^k = PM^kP^{-1}$  (par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$ ) on en déduit que

$$\left( I_3 + \frac{1}{n}B \right)^n = P \left( I_3 + \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \right)^n P^{-1}$$

Un calcul par blocs montre (toujours par récurrence sur  $k$ ) que

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}), \forall a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & M^k \end{pmatrix}$$

En notant  $A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ , on en déduit que

$$\left( I_3 + \frac{1}{n}B \right)^n = P \begin{pmatrix} 1/n^n & 0 \\ 0 & (I_2 + \frac{1}{n}A)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

La question 2.A (en ajoutant que  $1/n^n \rightarrow 1$ ) donne  $\begin{pmatrix} 1/n^n & 0 \\ 0 & (I_2 + \frac{1}{n}A)^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\beta \end{pmatrix}$  avec

$R_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$ . Enfin,  $M \in M_3(\mathbb{R}) \mapsto PMP^{-1}$  est linéaire et donc continue (on est en dimension finie) et ainsi

$$E(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( I_3 + \frac{1}{n}B \right)^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} P^{-1}$$

$E(B)$  est donc la matrice dans une bonne base (la base  $\mathcal{B}$  mentionnée plus haut) de la rotation axiale d'axe dirigé par  $e_1$  et d'angle  $|\beta|$  (tant que l'axe n'est pas orienté, l'angle ne l'est pas non plus et est défini au signe près). Cet angle non orienté est donc égal à  $\frac{\|B\|_2}{\sqrt{2}}$ .

### 3 Exponentielle de matrices diagonalisables.

A.1 Notons  $d_1, \dots, d_p$  les coefficients diagonaux de  $D$ . On a  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_p)$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left( I_p + \frac{1}{n}D \right) = \text{diag} \left( 1 + \frac{d_1}{n}, \dots, 1 + \frac{d_p}{n} \right)^n = \text{diag} \left( \left( 1 + \frac{d_1}{n} \right)^n, \dots, \left( 1 + \frac{d_p}{n} \right)^n \right)$$

La question préliminaire indique que  $(1 + \frac{d_k}{n})^n \rightarrow e^{d_k}$  et ainsi

$$E(D) = \text{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_p})$$

$E(D)$  est diagonale à coefficients diagonaux non nuls et est donc inversible :

$$E(D) \in GL_p(\mathbb{K})$$

A.2 Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les valeurs propres de  $D$  deux à deux distinctes (chaque  $d_i$  est un  $\lambda_j$ ). D'après le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe un (unique)  $Q \in \mathbb{K}[X]$  de degré  $\leq k-1$  tel que  $\forall j, Q(\lambda_j) = e^{d_j}$ . On a alors  $\forall j, Q(d_j) = e^{d_j}$  et

$$Q(D) = \text{diag}(Q(d_1), \dots, Q(d_p)) = E(D)$$

A.3 Tout d'abord,  $E$  envoie bien les éléments de  $\Delta$  dans  $GL_p(\mathbb{K})$ . De plus, si  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_p)$  et  $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_p)$  sont dans  $\Delta$ , on a

$$\begin{aligned} E(A+B) &= E(\text{diag}(a_1+b_1, \dots, a_p+b_p)) \\ &= \text{diag}(e^{a_1+b_1}, \dots, e^{a_p+b_p}) \\ &= \text{diag}(e^{a_1}e^{b_1}, \dots, e^{a_p}e^{b_p}) \\ &= \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_p})\text{diag}(e^{b_1}, \dots, e^{b_p}) \\ &= E(A)E(B) \end{aligned}$$

$E$  est donc bien un morphisme de groupes de  $(\Delta, +)$  dans  $(GL_p(\mathbb{K}), \times)$ .

B.1 Par hypothèse, il existe une matrice inversible  $P \in GL_p(\mathbb{K})$  et une matrice  $D \in \Delta$  telles que  $P^{-1}AP = D$ . On a alors  $I_p + \frac{1}{n}A = P \left( I_p + \frac{1}{n}D \right) P^{-1}$ . Comme  $(PMP^{-1})^k = PM^kP^{-1}$  (récurrence sur  $k$ ) on en déduit que

$$\left( I_p + \frac{1}{n}A \right)^n = P \left( I_p + \frac{1}{n}D \right)^n P^{-1}$$

On vient de voir que  $(I_p + \frac{1}{n}D)^n \rightarrow E(D)$  et on sait que  $M \rightarrow PMP^{-1}$  est continue. On en déduit que  $E(A)$  existe et que

$$E(A) = PE(D)P^{-1}$$

B.2 Le déterminant étant un invariant de similitude, on a  $\det(E(A)) = \det(E(D))$ . En notant  $d_1, \dots, d_p$  les coefficients diagonaux de  $D$ , on a

$$\det(E(D)) = \prod_{k=1}^p e^{d_k} = e^{\sum_{k=1}^p d_k} = e^{\text{Tr}(D)}$$

Enfin, la trace étant un invariant de similitude,  $D$  et  $A$  ont même trace et finalement

$$\det(E(A)) = e^{\text{Tr}(A)}$$

B.3 On a encore  $xI_p + A = P(xI_p + D)P^{-1}$  et donc, par le même calcul ( $xI_p + D$  étant diagonale)

$$E(xI_p + A) = PE(xI_p + D)P^{-1}$$

Avec le morphisme évoqué en 3.A.3, on a aussi  $E(xI_p + D) = E(xI_p)E(D)$  et, avec 3.A.1,  $E(xI_p) = e^x I_p$ . Ainsi

$$E(xI_p + A) = P(e^x I_p E(D))P^{-1} = e^x PE(D)P^{-1} = e^x E(A)$$

C.1 Comme  $u_A$  et  $u_B$  commutent, tout sous-espace propre pour  $u_A$  est stable par  $u_B$  (c'est un résultat du cours). Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les valeurs propres de  $A$  deux à deux distinctes et  $E_1, \dots, E_k$  les sous-espaces propres associés.  $E_j$  étant stable par  $u_B$ ,  $u_B$  induit un endomorphisme  $v_j$  sur  $E_j$ . Or, la restriction à un sous-espace stable d'un diagonalisable est diagonalisable (autre résultat du cours) et  $v_j$  est donc diagonalisable. Il existe une base  $\mathcal{B}_j$  de  $E_j$  formée de vecteurs propres pour  $v_j$  et donc pour  $u_B$ . De plus, les éléments de  $\mathcal{B}_j$  sont dans  $E_j$  et sont donc aussi des vecteurs propres pour  $u_A$ .

Comme  $A$  est diagonalisable, les  $E_j$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{K}^p$  et la concaténation  $\mathcal{B}$  des  $E_j$  est une base de  $\mathbb{K}^p$ . On a vu qu'elle est formée de vecteurs propres pour  $u_A$  ET  $u_B$ . Dans cette base,  $u_A$  et  $u_B$  sont représentés par des matrices diagonales.

Matriciellement, ceci signifie que si  $P$  est la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{B}$  alors  $P^{-1}AP$  et  $P^{-1}BP$  sont diagonales

C.2 On a alors  $P^{-1}(A+B)P$  qui est diagonale et  $E(A+B)$  existe. De plus, en notant  $D_A = P^{-1}AP$  et  $D_B = P^{-1}BP$ , on a  $P^{-1}(A+B)P = D_A + D_B$  et

$$E(A+B) = P^{-1}E(D_A + D_B)P$$

Toujours avec le morphisme de 3.A.3, on conclut que

$$E(A+B) = P^{-1}E(D_A)E(D_B)P = P^{-1}E(D_A)PP^{-1}E(D_B)P = E(A)E(B)$$

Enfin, comme  $D_A + D_B = D_B + D_A$ , on peut reprendre ceci pour obtenir

$$E(A+B) = P^{-1}E(D_B)E(D_A)P = E(B)E(A)$$

## 4 Exponentielle de matrices nilpotentes.

A.1 Soit  $j \in [1, k]$ ; si  $x \in \ker(A^{j-1})$  alors  $A^{j-1}x = 0$  et donc, en composant par  $A$ ,  $A^j x = A0 = 0$  ce qui montre que  $x \in \ker(A^j)$ . On a donc  $\ker(A^{j-1}) \subset \ker(A^j)$ .

Supposons, par l'absurde, que l'on ait une égalité. Soit alors  $x \in \mathbb{C}^p$ ; on a  $0 = A^k x = A^j A^{k-j} x$  et donc  $A^{k-j} x \in \ker(A^j)$ . Avec l'hypothèse faite,  $A^{k-j} x \in \ker(A^{j-1})$  et donc  $A^{k-1} x = 0$ . Ceci étant vrai pour tout  $x$ , on a  $A^{k-1} = 0$  ce qui est une contradiction avec l'hypothèse sur  $A$ .

Ainsi, pour tout entier  $j$  tel que  $1 \leq j \leq k$ ,  $\ker(A^{j-1})$  est inclus strictement dans  $\ker(A^j)$ .

A.2 La suite  $(\dim(\ker(A^j)))_{0 \leq j \leq k}$  est ainsi strictement croissante et on montre par récurrence que  $\forall j \in [0, k]$ ,  $\dim(\ker(A^j)) \geq j$ . Comme  $\ker(A^k) \subset \mathbb{C}^p$ , on a donc

$$k \leq \dim(\ker(A^k)) \leq p$$

B. Comme  $A$  et  $I_p$ , on peut utiliser la formule du binôme pour calculer  $(I_p + A/n)^n$ . Comme les puissances de  $A$  sont nulles à partir du rang  $k$ , il ne reste plus que  $k$  termes dans la somme (quand  $n \geq k-1$  :

$$\forall n \geq k-1, \left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} A^j$$

En remarquant que  $\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^j}{j!}$ , on voit que  $\binom{n}{j} \frac{1}{n^j} A^j \rightarrow A^j/j!$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Ainsi  $E(A)$  existe et

$$E(A) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} A^j$$

Si  $A$  est triangulaire supérieure stricte alors son polynôme caractéristique est  $(-X)^p$ . Par théorème de Cayley-Hamilton, on a  $A^p = 0$  et  $A$  est nilpotente. On obtient  $E(A)$  avec la formule précédente (en remplaçant  $k$  par  $p$  ce qui ajoute d'éventuels termes nuls).

En utilisant les fonction `diag` et `rowdim` (pour obtenir la taille de la matrice) de la librairie `linalg`, on obtient la fonction Maple suivante.

```
E:=proc(A)
  p:=rowdim(A);
  M:=diag(1$p); #pour stocker les puissances successives de A
  S:=diag(0$p); #pour stocker les sommes partielles
  for i from 0 to p-1 do
    S:=evalm(S+M/i!);
    M:=evalm(M&*A);
  od;
  return(evalm(S))
end;
```

C. C'est la formule obtenue ci-dessus.  $Q = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{X^j}{j!}$  convient.

D.  $I_p + \frac{B}{n}$  et  $\frac{A}{n}$  commutent et la formule du binôme donne

$$\begin{aligned} \left(I_p + \frac{A+B}{n}\right)^n &= \left(I_p + \frac{B}{n} + \frac{A}{n}\right)^n \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{A^j}{n^j} \left(I_p + \frac{B}{n}\right)^{n-j} \end{aligned}$$

Comme  $A^k = 0$ , les termes d'indice  $\geq k$  dans la somme sont nuls et il reste

$$\forall n \geq k-1, \left(I_p + \frac{A+B}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n^j} \binom{n}{j} A^j \left(I_p + \frac{B}{n}\right)^{n-j}$$

On a déjà vu que  $\frac{1}{n^j} \binom{n}{j} \rightarrow 1/j!$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . L'énoncé admet que  $\left(I_p + \frac{B}{n}\right)^{n-j} \rightarrow E(B)$ . Comme il y a un nombre constant (indépendant de  $n$ ) de termes, les théorèmes d'opération donnent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_p + \frac{A+B}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} A^j E(B)$$

Avec la formule vue plus haut pour  $E(A)$ , on a donc  $E(A+B)$  qui existe et

$$E(A+B) = E(A)E(B)$$

E. On utilise la formule précédente avec  $B = xI_p$  (qui commute avec  $A$  et telle que  $E(xI_p) = e^x I_p$ ) ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{C}, E(xI_p + A) = E(A)E(xI_p) = e^x E(A)$$

F.  $A$  étant nilpotente elle est annihilée par  $X^k$  qui est scindé. Ainsi,  $A$  est trigonalisable et 0 est son unique valeur propre. Il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}AP = T$  soit triangulaire

supérieure stricte. On a alors  $A^j = PT^jP^{-1}$  et (en utilisant la fomule vue plus haut pour  $E(A)$  valable aussi pour  $E(T)$  car  $T$  est nilpotente aussi)

$$E(A) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{A^j}{j!} = P \sum_{j=0}^{p-1} \frac{T^j}{j!} P^{-1} = PE(T)P^{-1}$$

ou encore  $E(A) - I_p = P(E(T) - I_p)P^{-1}$ .  $E(A) - I_p$  est donc semblable à

$$E(T) - I_p = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{T^j}{j!}$$

Les  $T_j$  pour  $j \geq 1$  étant strictement triangulaires supérieures,  $E(T) - I_p$  l'est aussi.  $E(T) - I_p$  est donc nilpotente (voir 4.B) et  $E(A) - I_p$  l'est donc aussi (le caractère nilpotent est un invariant de similitude).

## 5 Cas général.

- A.1  $A$  étant dans  $M_p(\mathbb{C})$ ,  $\chi_A$  est un polynôme de degré  $p$  (de coefficient dominant  $(-1)^p$ ) et le résultat demandé est celui de la division euclidienne de  $P_n$  par  $\chi_A$ .
- A.2 Comme  $P \in \mathbb{C}[X] \mapsto P(A)$  est un morphisme d'algèbre, on a  $P_n(A) = Q_n(A)\chi_A(A) + R_n(A)$ . Or, le théorème de Cayley-Hamilton indique que  $\chi_A$  annule  $A$  et ainsi

$$P_n(A) = \left( I_p + \frac{1}{n}A \right) = R_n(A)$$

$E(A)$  existe donc ssi  $(R_n(A))$  converge (et est alors égal à sa limite).

- A.3 Fixons  $x \in \mathbb{C}$  et  $q \in [1, p]$ . Supposons que  $\sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i (xI_q + J_q)^i = 0$ . Par formule du binôme, on peut développer  $(xI_q + J_q)^i$  puisque  $I_q$  et  $J_q$  commutent. On obtient alors, en inversant les sommes

$$0 = \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i (xI_q + J_q)^i = \sum_{j=0}^{q-1} \left( \sum_{i=j}^{q-1} \binom{i}{j} \alpha_i x^{i-j} \right) J_q^j$$

On montre que  $J_q^j = \sum_{k=1}^{p-j} E_{k, k+j}$  (la diagonale de 1 remonte quand la puissance augmente). La nullité de la matrice ci-dessus se traduit donc par

$$\forall j \in [0, q-1], \sum_{i=j}^{q-1} \binom{i}{j} \alpha_i x^{i-j} = 0$$

Pour  $j = q-1$ , on obtient  $\alpha_{q-1} = 0$ . Pour  $j = q-2$  on obtient alors  $\alpha_{q-2} = 0$  et on poursuit ainsi pour montrer la nullité de tous les  $\alpha_i$  (de manière plus rigoureuse, on mène une récurrence descendante sur  $i$  pour montrer cette nullité). On en déduit que la famille proposée est libre.

- A.4  $B - XI_p$  est diagonale par bloc et on peut utiliser la formule des déterminants bloc-diagonaux pour obtenir

$$\chi_B(x) = \prod_{j=1}^k \det((\lambda_j - X)I_{n_j} + J_{n_j})$$

$(\lambda_j - X)I_{n_j} + J_{n_j}$  est triangulaire supérieure et son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux. Ainsi,

$$\chi_B(x) = \prod_{j=1}^k (\lambda_j - X)^{n_j}$$

$\chi_B$  possède donc les même racines complexes que  $\chi_A$  avec les mêmes ordres de multiplicité. Comme les deux polynômes ont même coefficient dominant  $(-1)^p$ , on a donc

$$\chi_B = \chi_A$$

B.1 On sait que l'on peut faire du calcul par blocs avec les matrices pourvu que les tailles des blocs le permettent. En particulier si  $M = \text{diag}(M_1, \dots, M_k)$  et  $M' = \text{diag}(M'_1, \dots, M'_k)$  avec  $M_i$  et  $M'_i$  qui sont des blocs carrés de même taille, alors  $MM' = \text{diag}(M_1M'_1, \dots, M_kM'_k)$ . En itérant cette propriété, on a  $M^j = \text{diag}(M_1^j, \dots, M_k^j)$  pour tout entier naturel  $j$ . Ceci donne directement le résultat demandé.

B.2 a) En combinant linéairement les égalités de la question précédente, on obtient que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], P(B) = \text{diag}(P(\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1}), \dots, P(\lambda_k I_{n_k} + J_{n_k}))$$

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non nul et qui annule  $B$ . Il existe des  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  et un polynôme  $Q$  dont aucun des  $\lambda_i$  n'est racine tels que

$$P = Q(X) \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

Comme aucune des racines complexes de  $Q$  n'est valeur propre de  $A$ ,  $Q(A)$  est inversible et donc  $\tilde{P} = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$  annule aussi  $A$  ( $0 = P(A) = \tilde{P}(A)Q(A)$  et on peut multiplier par  $Q(A)^{-1}$  qui est inversible).

$\tilde{P}$  annulant  $B$ , il annule chaque  $\lambda_j I_{n_j} + J_{n_j}$ . Comme  $\lambda_j$  est l'unique valeur propre de  $\lambda_j I_{n_j} + J_{n_j}$  (matrice triangulaire dont on lit les valeurs propres sur la diagonale) on va obtenir comme ci-dessus que  $(X - \lambda_j)^{\alpha_j}$  annule  $\lambda_j I_{n_j} + J_{n_j}$  c'est à dire que  $X^{\alpha_j}$  annule  $J_{n_j}$ . Avec le calcul fait plus haut des puissances de  $J_{n_j}$ , on obtient que  $\alpha_i \geq n_i$ .

Finalement,  $\tilde{P}$  est de degré  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \geq n_1 + \dots + n_k = p$  et c'est a fortiori le cas pour  $P$ .

On a montré qu'un polynôme annulateur non nul de la matrice  $B$  est de degré  $\geq p$ .

b) Supposons  $\sum_{i=0}^{p-1} \beta_i B^i = 0$ ;  $\sum_{i=0}^{p-1} \beta_i X^i$  annule donc  $B$  et est dans  $\mathbb{C}_{p-1}[X]$ . Avec la question précédente, c'est le polynôme nul et les  $\beta_i$  sont nuls. Ceci signifie que la famille  $\{B^i, 0 \leq i \leq p-1\}$  est libre.

B.3 Comme expliqué plus haut, on a

$$P_n(B) = \text{diag}(P_n(\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1}), \dots, P_n(\lambda_k I_{n_k} + J_{n_k}))$$

Comme chaque  $J_{n_j}$  est nilpotente, on peut utiliser la partie 4 pour dire que  $P_n(\lambda_j I_{n_j} + J_{n_j}) \rightarrow e^{\lambda_j} E(J_{n_j})$ . Ainsi,  $(P_n(B))$  converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(B) = \text{diag}(e^{\lambda_1} E(J_{n_1}), \dots, e^{\lambda_k} E(J_{n_k}))$$

B.4 Comme  $\chi_A = \chi_B$  alors on a  $P_n = Q_n \chi_B + R_n$  et on sait donc que  $(R_n(B))$  converge. On veut en déduire que  $(R_n(A))$  converge.  $R_n$  étant dans  $\mathbb{C}_{p-1}[X]$  peut s'écrire

$$R_n = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(n) X^k$$

et on a

$$R_n(B) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(n) B^k$$

La famille  $(B^i)_{0 \leq i \leq p-1}$  étant libre, on peut la compléter en une base  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ .  $(R_n(B))$  étant convergente, elle l'est (on est en dimension finie où toutes les normes sont équivalentes) au sens de la norme infinie associée à  $\mathcal{C}$ . Ceci revient à dire que les suites coordonnées dans cette base sont convergentes (dans  $\mathbb{C}$ ). Ainsi, pour tout  $i \in [0, p-1]$ , la suite  $(\alpha_i(n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Notons  $\gamma_i \in \mathbb{C}$  sa limite. On a alors

$$R_n(A) \rightarrow \sum_{k=0}^p \gamma_k A^k$$

et on a prouvé la convergence voulue.