Corrigé de Mines-Ponts 2013 PC math 2

Une coquille: $\mathbf{N}$ est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls.

Question 1

$c_n(H_r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k r^k \,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(k-n)\theta} d\theta.$

Il y a convergence normale sur $[-\pi,\pi]$ puisque $|a_k r^k \,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(k-n)\theta}| \leqslant |a_k| r^k$ et que la série $(\sum |a_k| r^k)$ converge (puisque $0<r<1$).

On peut donc intégrer terme à terme: $c_n(H_r) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbf{N}} a_k r^k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(k-n)\theta} d\theta.$

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(k-n)\theta} d\theta$ est égal à 1 si $k=n$ et à $\dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(k-n)\theta}}{k-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ si $k\neq n$.

On obtient donc: $c_n(H_r) = 0$ si $n<0$ et $c_n(H_r) = a_n r^n$ si $n \geqslant 0$.

De même, $c_n(\overline{H_r}) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbf{N}} \overline{a_k} r^k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,(k+n)\theta} d\theta$ donne $c_n(\overline{H_r}) = 0$ si $n>0$ et $c_n(\overline{H_r}) = \overline{a_{-n}} r^{-n}$ si $n \leqslant 0$.

Question 2

De $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ on déduit $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\,(h(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}))\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,n\theta} d\theta = c_n(H_r) + c_n(\overline{H_r}) = a_n r^n$ si $n>0$, $\overline{a_{-n}} r^{-n}$ si $n<0$ et $a_0 + \overline{a_0}$ si $n=0$.

Question 3

Si a_0 est réel, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\,(h(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})) d\theta = 2a_0$.

Question 4

Puisque $r<1$, la fonction $\theta \mapsto \mathrm{Re}\,(h(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}))$ est continue donc bornée par M sur $[-\pi,\pi]$. On a donc en posant $u_n(\theta) = \mathrm{Re}\,(h(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}))\tau^n\cos(n\theta+\varphi_n)$:

$|u_n(\theta)| \leqslant M\tau^n$ et il y a convergence normale sur $[-\pi,\pi]$ de la série de fonctions $(\sum u_n(\theta))$. On peut donc intégrer terme à terme pour obtenir:

$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\,(h(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}))\left(\frac{1}{2} + \sum_{n\geqslant 1}\tau^n\cos(n\theta+\varphi_n)\right) d\theta = a_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\tau^n \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\,(h(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}))\cos(n\theta+\varphi_n) d\theta.$

De $\cos(n\theta+\varphi_n) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_n} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,n\theta}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\varphi_n})$ on déduit pour $n\geqslant 1$:

$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\,(h(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}))\cos(n\theta+\varphi_n) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\,(h(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}))\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta} d\theta e^{\,\mathrm{i}\,\varphi_n} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\,(h(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}))\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,n\theta} d\theta e^{-\,\mathrm{i}\,\varphi_n} =$ $\dfrac{1}{2}(\overline{a_n} r^n\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_n} + a_n r^n\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\varphi_n}) = r^n|a_n|$ puisque $a_n = |a_n|\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_n}$.

On obtient bien $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n|\tau^n r^n$ puisque $a_0 = |a_0|$.

Question 5

Pour $0<\tau\leqslant \dfrac{1}{3}$ on a $|\tau^n\cos(n\theta+\varphi_n)| \leqslant \dfrac{1}{3^n}$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|\tau^n\cos(n\theta+\varphi_n)| \leqslant \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$

Par suite $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\tau^n\cos(n\theta+\varphi_n) \geqslant 0.$

Si $M = \displaystyle\max_{-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi}|\mathrm{Re}\,(h(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}))|$ on déduit de la question 4:

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n|\tau^n r^n \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M\left|\frac{1}{2} + \sum_{n\geqslant 1}\tau^n\cos(n\theta+\varphi_n)\right| d\theta = M\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n\geqslant 1}\tau^n\cos(n\theta+\varphi_n)\right) d\theta = M$ puisqu'on peut intégrer terme à terme (il y a convergence normale de la série de terme général $\tau^n\cos(n\theta+\varphi_n)$) et que de plus $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta+\varphi_n) d\theta = \left[\frac{\sin(n\theta+\varphi_n)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ pour $n\geqslant 1$.

Question 6

Si h vérifie les trois hypothèses on a pour $\tau = \dfrac{1}{3}$: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n| \frac{1}{3^n} r^n \leqslant \max_{-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi} |\operatorname{Re}(h(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}))| \leqslant 1$.

Puique le rayon de convergence est au moins égal à 1 il y a continuité sur le disque fermé de rayon $\dfrac{1}{3}$ et on peut faire tendre r vers 1. On obtient donc pour $|z| \leqslant \dfrac{1}{3}$: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n||z|^n \leqslant 1$.

Question 7

Une coquille: on obtient le résultat pour $|z| \leqslant \dfrac{1}{3}$.

f vérifie l'hypothèse **(H1)** mais pas **(H2)**. Posons $b_0 = |b_0|\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$ et $h(z) = \mathrm{e}^{\,-\,\mathrm{i}\,\varphi} f(z)$. h vérifie les hypothèses **(H1)** et **(H2)** puisque $b_0\,\mathrm{e}^{\,-\,\mathrm{i}\,\varphi}$ est un réel positif. Pour $|z| < 1$, $|\operatorname{Re}(g(z))| \leqslant |g(z)| = |f(z)| \leqslant 1$ donc h vérifie aussi **(H3)**. On a donc par la question 6: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n||z|^n \leqslant 1$ pour $|z| \leqslant \dfrac{1}{3}$.

Question 8

Pour que $f_\lambda(z)$ soit défini pour $|z| < 1$ il faut que $\lambda \leqslant 1$ (sinon $z = \frac{1}{\lambda}$ donnerait une contradiction). Pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, f_λ possède une DSE de rayon de convergence égal à $\frac{1}{\lambda} \geqslant 1$ donc f_λ vérifie **(H1)**. De plus, quand $|z| < 1$:

$f_\lambda(z) \leqslant 1 \Leftrightarrow |z-\lambda|^2 \leqslant |1-\lambda z|^2 \Leftrightarrow (x-\lambda)^2 + y^2 \leqslant (1-\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 \Leftrightarrow (1-\lambda^2)(x^2+y^2-1) \leqslant 0$ qui est bien vérifié.

Donc f_λ vérifie **(H1)** et **(H4)** si $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Question 9

Pour $|z| < 1$, $f_\lambda(z) = (z-\lambda)\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \lambda^n z^n = -\lambda + \sum_{n\geqslant 1} (1-\lambda^2)\lambda^{n-1} z^n$. On a donc $b_0(\lambda) = -\lambda$ et pour $n \geqslant 1$: $b_n(\lambda) = (1-\lambda^2)\lambda^{n-1}$.

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |b_n(\lambda)||z|^n = \lambda + (1-\lambda^2)\sum_{n\geqslant 1} \lambda^{n-1}|z|^n = \lambda + (1-\lambda^2)\frac{|z|}{1-\lambda|z|}$.

Si $\lambda = 1$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |b_n(\lambda)||z|^n = 1$ pour tout z.

Si $0 \leqslant \lambda < 1$:

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |b_n(\lambda)||z|^n \leqslant 1 \Leftrightarrow (1-\lambda^2)\frac{|z|}{1-\lambda|z|} \leqslant 1-\lambda \Leftrightarrow (1+\lambda)\frac{|z|}{1-\lambda|z|} \leqslant 1 \Leftrightarrow (1+2\lambda)|z| \leqslant 1$.

Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |b_n(\lambda)||z|^n \leqslant 1$ si et seulement si $|z| \leqslant \dfrac{1}{1+2\lambda}$.

Question 10

Si $|z| \in]\dfrac{1}{3}, 1[$, il existe $\lambda_0 \in]0,1[$ tel que $\dfrac{1}{1+2\lambda_0} < |z|$ et donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |b_n(\lambda_0)||z|^n > 1$.

Question 11

f_{λ_0} vérifie **(H1)** et **(H4)** mais $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |b_n(\lambda_0)||z|^n \leqslant 1$ n'est pas vérifiée pour $|z| > \dfrac{1}{3}$. La constante $\dfrac{1}{3}$ ne peut donc pas être remplaçée par un réel plus grand.

Question 12

Quand $0 < r < 1$ il y a convergence absolue pour $f(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} b_n r^n\,\mathrm{e}^{\,n\,\mathrm{i}\,\theta}$ et $\overline{g(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})} = \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} \overline{c_n} r^n r\,\mathrm{e}^{\,-\,n\,\mathrm{i}\,\theta}$. La série produit de Cauchy converge donc aussi absolument: $f(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})\overline{g(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})} = \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} r^n \sum_{k=0}^{n} b_k\overline{c_{n-k}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(2k-n)\theta}$.

Par suite la série de fonctions de terme général $u_n(\theta) = r^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k\overline{c_{n-k}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(2k-n)\theta}$ converge normalement sur $[-\pi,\pi]$.

On a donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})\overline{g(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})}d\theta = \sum_{n\in\mathbf{N}} r^n \sum_{k=0}^{n} b_k\overline{c_{n-k}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(2k-n)\theta}d\theta$. Mais $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(2k-n)\theta}d\theta$ est nul si $2k \neq n$ et vaut 2π si $n = 2k$.

On a donc $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})\overline{g(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})}d\theta = \sum_{k\in\mathbf{N}} r^{2k}b_k\overline{c_k}$.

Question 13

On déduit de la question 12 que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})|^2 d\theta = \sum_{n\in\mathbf{N}} r^{2n}|b_n|^2$. Comme $|f(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})| \leqslant 1$ puisque $0 < r < 1$ et que f vérifie **(H4)** on a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} r^{2n}|b_n|^2 \leqslant 1$ d'où $|||f||| \leqslant 1$.

Question 14

Si f vérifie **(H1)** on sait par la question 12 que $\displaystyle|||f|||^2 = \sup_{0\leqslant r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})|^2 d\theta$. En remplaçant f par $A_f(\psi) = f\psi$ qui vérifie aussi **(H1)** on obtient $\displaystyle|||A_f(\psi)|||^2 = \sup_{0\leqslant r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})\psi(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}))|^2 d\theta \leqslant |||\psi|||^2$ puisque $|f(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})| \leqslant 1$ (f vérifie **(H4)**).

Si $\displaystyle A_f(\psi)(z) = f(z)\psi(z) = \sum_{k\in\mathbf{N}} c_k z^k$, on déduit $P_n \circ A_f(\psi) = g_n$ avec $g_n(z) = c_0 + c_n z^n$.

$\displaystyle|||P_n \circ A_f(\psi)|||^2 = \sup_{0\leqslant r<1}(c_0^2 + c_n^2 r^{2n}) \leqslant \sup_{0\leqslant r<1}\sum_{k\in\mathbf{N}} r^{2k}c_k^2 = |||A_f(\psi)|||^2 \leqslant |||\psi|||^2$.

Question 15

Si $\psi(z) = \alpha + \beta z^n$ et $\displaystyle f(z) = \sum_{k\in\mathbf{N}} b_k z^k$ on a $\displaystyle A_f(\psi)(z) = (\alpha + \beta z^n)\sum_{k\in\mathbf{N}} b_k z^k = \alpha b_0 + ... + (\alpha b_n + \beta b_0)z^n + ...$ donc $P_n \circ A_f(\psi)(z) = \alpha b_0 + (\alpha b_n + \beta b_0)z^n$. Par suite $S \circ P_n \circ A_f(\psi) = \begin{pmatrix} \alpha b_0 \\ \alpha b_n + \beta b_0 \end{pmatrix}$ d'où la matrice $D = \begin{pmatrix} b_0 & 0 \\ b_n & b_0 \end{pmatrix}$.

Question 16

$(\Psi|D\Theta) = \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} \gamma b_0 \\ \gamma b_n + \delta b_0 \end{pmatrix}\right) = \alpha\gamma b_0 + \beta\gamma b_n + \beta\delta b_0$.

$({}^tD\Psi|\Theta) = \left(\begin{pmatrix} \alpha b_0 + \beta b_n \\ \beta b_0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}\right) = \alpha\gamma b_0 + \beta\gamma b_n + \beta\delta b_0$. On a bien $(\Psi|D\Theta) = ({}^tD\Psi|\Theta)$.

Question 17

$({}^tDD\Psi|\Psi) = (D\Psi|D\Psi) = (\alpha b_0)^2 + (\alpha b_n + \beta b_0)^2 = |||P_n \circ A_f(\psi)|||^2 \leqslant |||\psi|||^2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\Psi|\Psi)$ donc $(A\Psi|\Psi) = (\Psi|\Psi) - ({}^tDD\Psi|\Psi) \geqslant 0$: A est positive.

En prenant $\Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on obtient $b_0^2 + b_n^2 \leqslant 1$ donc $b_0^2 \leqslant 1$.

Si λ est une valeur propre de A, il existe $\Psi \neq 0$ tel que $A\Psi = \lambda\Psi$ d'où $(A\Psi|\Psi) = \lambda(\Psi|\Psi) \geqslant 0$ .En divisant par $(\Psi|\Psi) > 0$ on obtient $\lambda \geqslant 0$: les valeurs propres de la matrice symétrique A sont des réels positifs ou nuls.

Question 18

On calcule $A = \begin{pmatrix} 1 - b_0^2 - b_n^2 & -b_0 b_n \\ -b_0 b_n & 1 - b_0^2 \end{pmatrix}$ donc $\det(A) = (1 - b_0^2 - b_n^2)(1 - b_0^2) - (b_0 b_n)^2 = (1 - b_0^2)^2 - b_n^2 \geqslant 0$ puisque $\det(A)$ est égal au produit des valeurs propres de A. On a donc $|b_n| \leqslant 1 - b_0^2$.

Question 19

De la question 18 on déduit pour $|z| < 1$: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n||z|^n \leqslant |b_0| + \sum_{n\geqslant 1}(1 - b_0^2)|z|^n = |b_0| + (1 - b_0^2)\frac{|z|}{1 - |z|} \leqslant M(|z|)$ par définition de M (puisque $0 \leqslant |b_0| \leqslant 1$).

Question 20

Si $r = 0$ on a $M(0) = 1$. Pour $0 < r < 1$ étudions $\displaystyle g(t) = t + (1 - t^2)\frac{r}{1 - r}$ sur $[0, 1]$. $\displaystyle g'(t) = 1 - 2t\frac{r}{1 - r}$ qui s'annule quand $\displaystyle t = \frac{1 - r}{2r}$. Or $\displaystyle\frac{1 - r}{2r} \leqslant 1 \Leftrightarrow r \geqslant \frac{1}{3}$.

Quand $r \leqslant \dfrac{1}{3}$, $g'(t) \geqslant 0$ donc g est croissante: $M(r) = g(1) = 1$. Quand $r > \dfrac{1}{3}$, g atteint son maximum en $t_0 = \dfrac{1-r}{2r}$ donc $M(r) = g\left(\dfrac{1-r}{2r}\right) = \dfrac{1-2r+5r^2}{4r(1-r)}$.

Question 21

Il y a une coquille dans l'énoncé: il faut supposer $|z| < 1-\varepsilon$ sinon l'inégalité demandée n'a pas de sens.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $(\sum\limits_{n=0}^{N} |b_n z^n|)^2 = (\sum\limits_{n=0}^{N} |b_n (1-\varepsilon)^n \dfrac{z^n}{(1-\varepsilon)^n}|)^2 \leqslant \sum\limits_{n=0}^{N} |b_n (1-\varepsilon)^n|^2 \sum\limits_{n=0}^{N} |\dfrac{z^n}{(1-\varepsilon)^n}|^2$.
Pour $|z| < 1-\varepsilon$ on peut faire tendre N vers $+\infty$ pour obtenir: $(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |b_n z^n|)^2 \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n^2 (1-\varepsilon)^{2n} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^{2n}}{(1-\varepsilon)^{2n}}$

d'où $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} |b_n z^n| \leqslant \left(\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} b_n^2 (1-\varepsilon)^{2n}\right)^{1/2} \left(1 - \dfrac{|z|^2}{|1-\varepsilon|^2}\right)^{-1/2}$.

Pour $|z| < 1$, on choisit $\varepsilon < 1 - |z|$. Par la question 13 on a $|||f||| \leqslant 1$ donc $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} b_n^2 (1-\varepsilon)^{2n} \leqslant 1$. D'où $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} |b_n z^n| \leqslant \left(1 - \dfrac{|z|^2}{|1-\varepsilon|^2}\right)^{-1/2}$ d'où en faisant tendre ε vers 0: $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} |b_n z^n| \leqslant (1-|z|^2)^{-1/2}$.

Comme on a aussi par la question 19: $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} |b_n||z|^n \leqslant M(|z|)$ on obtient bien $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} |b_n||z|^n \leqslant m(|z|)$.