A 2013 MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2013

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le rayon de Bohr

On note $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\mathbf{N}$ l'ensemble des nombres entiers, $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, et $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs. On note $\mathfrak{Re}\,(z)$ la partie réelle du nombre complexe z.

(H1) On dit que la fonction $g\ :\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ vérifie l'hypothèse (**H1**) si elle possède un développement en série entière au voisinage de l'origine, de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

1 Séries entières

Soit $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n z^n$ une série entière, où z ainsi que les coefficients a_n sont complexes. On pose

$$h\left(z\right)=\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n z^n \text{ et } H_r\left(\theta\right)=h\left(re^{i\theta}\right),\ \text{ où } r=\left|z\right| \text{ et } \theta=\operatorname{Arg} z. \tag{1}$$

On suppose désormais que la fonction h vérifie l'hypothèse (**H1).**

Soit $r\in\left]0,1\right[$.

Question 1 *Déterminer les coefficients de Fourier de H_r et $\overline{H_r}$ en fonction de r et des a_k.*

Question 2 *En fonction du signe de n, en déduire les différentes expressions de*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\mathfrak{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right)e^{-in\theta}d\theta. \tag{2}$$

On suppose que, outre **(H1),** la fonction h vérifie l'hypothèse suivante :

(H2) le coefficient a_0 du développement en série entière de h est réel, positif ou nul.

Question 3 *Montrer que*

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\mathfrak{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right)d\theta. \tag{3}$$

On pose $a_n=\left|a_n\right|e^{i\varphi_n}$, et on choisit $\tau\in\left]0,1\right[$.

Question 4 *Montrer que*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}}\left|a_n\right|\tau^n r^n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\mathfrak{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n\geq1}\tau^n\left(\cos\left(n\theta+\varphi_n\right)\right)\right)d\theta.$$

On choisit maintenant $\tau \in \,]0, 1/3]$

Question 5 *Déterminer le signe de* $1/2 + \sum_{n\geq 1} \tau^n \left(\cos\left(n\theta + \varphi_n\right)\right)$. *Montrer que*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n|\,\tau^n r^n \leq \max_{-\pi\leq\theta\leq\pi} \left|\mathfrak{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right)\right|.$$

(H3) On dit que la fonction $g\ :\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ vérifie l'hypothèse **(H3)** si, $\forall r \in [0,1[$, $\max_{-\pi\leq\theta\leq\pi} \left|\mathfrak{Re}\left(g\left(re^{i\theta}\right)\right)\right| \leq 1$.

Question 6 *En admettant que h vérifie les hypothèses* **(H1)**, **(H2)** *et* **(H3)**, *montrer que* $\sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n|\,|z|^n \leq 1$, *dès que* $|z| \leq 1/3$.

2 Le rayon de Bohr

On considère maintenant la fonction $f(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n z^n$, vérifiant l'hypothèse **(H1)** ainsi que

(H4) $|f(z)| \leq 1\ \forall |z| < 1$.

Question 7 *A l'aide du résultat de la question* **6** *montrer que*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n|\,|z|^n \leq 1,\ \forall |z| < 1/3. \tag{4}$$

La valeur $|z| = 1/3$ constitue le *rayon de Bohr* de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} b_n z^n$.

On considère maintenant le cas particulier de la fonction f_λ donnée par

$$f_\lambda(z) = (z-\lambda)/(1-\lambda z),$$

où $\lambda \in \mathbf{R}^+$.

Question 8 *Sous quelles conditions relatives à λ, la fonction f_λ vérifie-t-elle les hypothèses* **(H1)** *et* **(H4)** *?*

En admettant que λ vérifie ces conditions, on note $b_n(\lambda)$ les coefficients du développement en série entière de $f_\lambda\ :\ f_\lambda(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n(\lambda)\, z^n$.

Question 9 *Déterminer en fonction de λ les valeurs de $|z|$ telles que* $\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n(\lambda)|\,|z|^n \leq 1$.

Question 10 *Démontrer que si $|z| \in \,]1/3, 1[$, alors il existe $\lambda \in \,]0,1[$ tel que* $\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n(\lambda)|\,|z|^n > 1$.

Question 11 *En déduire que la constante $1/3$ obtenue à la question* **7** *ne peut être améliorée sans hypothèse supplémentaire sur f.*

3 Au-delà de $|z| = 1/3$ ...

Nous venons de démontrer que, sous les hypothèses **(H1) et (H4)** l'estimation (4) est optimale. Dans ce paragraphe on établit une estimation plus générale, valable au-delà du rayon de Bohr $r = 1/3$.

Question 12 *Montrer que si f et g vérifient* **(H1)**, *où*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{N}} b_n z^n \text{ et } g(z) = \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n z^n, \tag{5}$$

alors $\forall r \in]0,1[$

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} b_n \overline{c_n} r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(re^{i\theta}\right) \overline{g\left(re^{i\theta}\right)} d\theta.$$

On pose

$$|||f||| = \left(\sup_{0 \leq r < 1} \sum_{n \in \mathbf{N}} |b_n|^2 r^{2n} \right)^{1/2} \tag{6}$$

sous réserve que cette dernière quantité soit finie.

L'ensemble des fonctions de $z \in \mathbf{C}$ qui vérifient **(H1)** et **(H4)** et, par souci de simplification, dont les coefficients du développement en série entière sont réels est noté $\mathcal{E}$.

On suppose désormais que $f \in \mathcal{E}$.

Question 13 *En s'aidant de la question* **12**, *montrer que* $|||f||| \leq 1$.

On admettra que $|||f|||$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

On note $\mathcal{V}_n$ l'espace vectoriel des fonctions de la variable complexe z de la forme $\psi(z) = \alpha + \beta z^n$ où α et β appartiennent à $\mathbf{R}$.

On note P_n, $n \geq 1$, l'application qui à $g = \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n z^n$ vérifiant **(H1)** et dont les coefficients c_n sont réels, fait correspondre la fonction $g_n \in \mathcal{V}_n$ définie par
$g_n(z) = c_0 + c_n z^n$.

On note A_f l'application qui à $\psi \in \mathcal{V}_n$ fait correspondre la fonction $f\psi$; on rappelle que le produit de Cauchy de deux séries entières de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 est une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

Question 14 *Démontrer que pour tout $\psi \in \mathcal{V}_n$, $|||A_f(\psi)||| \leq |||\psi|||$ et en déduire que* $|||P_n \circ A_f(\psi)||| \leq |||\psi|||$.

On note S la bijection de $\mathcal{V}_n$ dans $\mathbf{R}^2$, qui à ψ définie par $\psi(z) = \alpha + \beta z^n$ fait correspondre le vecteur $\Psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Question 15 *Déterminer la matrice $\mathbb{D}$ de l'application linéaire qui à* $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ *fait correspondre $S \circ P_n \circ A_f(\psi)$ où $\psi = S^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha + \beta z^n$.*

On munit $\mathbf{R}^2$ de la norme euclidienne : $\|\Psi\| = \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}$, dérivant du produit scalaire $(\Psi\,|\Theta) = \alpha\gamma + \beta\delta$, où $\Psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\Theta = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$.

Question 16 *Montrer que pour tout Ψ, et pour tout $\Theta \in \mathbf{R}^2$, $(\Psi\,|\mathbb{D}\Theta) = \left({}^t\mathbb{D}\,\Psi\,|\Theta\right)$.*

On dit que la matrice $\mathbb{A}$ est positive si et seulement si $(\mathbb{A}\Psi\,|\Psi) \geq 0$ pour tout $\Psi \in \mathbf{R}^2$. On note $\mathbb{I}$ la matrice identité.

Question 17 *Déduire de la question* **14** *que $\mathbb{A} = \mathbb{I} - {}^t\mathbb{D}\,\mathbb{D}$ est positive. En déduire que $b_0^2 \leq 1$ et que les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont positives ou nulles.*

Question 18 *En déduire que $|b_n| \leq 1 - b_0^2$. On pourra s'aider du calcul du déterminant de $\mathbb{A}$.*

Pour $0 \leq r < 1$, on pose

$$M(r) = \sup_{0 \leq t \leq 1}\left(t + \left(1 - t^2\right)\frac{r}{1-r}\right). \tag{7}$$

Question 19 *Montrer que*

$$\forall\,|z| < 1,\ \sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n z^n| \leq M(|z|). \tag{8}$$

Question 20 *Déterminer $M(r)$ pour $r \in [0, 1[$.*

On pose

$$m(r) = \min\left(M(r), \left(1 - r^2\right)^{-1/2}\right). \tag{9}$$

Question 21 *Montrer que $\forall \varepsilon \in \,]0, 1[$,*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n z^n| \leq \left(\sum_{n\in\mathbf{N}} b_n^2\,|1-\varepsilon|^{2n}\right)^{1/2}\left(1 - |z|^2 / |1-\varepsilon|^2\right)^{-1/2}.$$

En déduire à l'aide de la question **13** *que*

$$\forall\,|z| < 1,\ \sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n|\,|z|^n \leq m(|z|). \tag{10}$$

Fin de l'épreuve