Mines-Ponts 1995, Première épreuve, options M&P'

(4 pages)

Première partie

I-1°) a) $\diamond$ $\mathcal{T}(U) = \{p > 0 \mid \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+p} = u_n\}$ est non vide et inclus dans $\mathbf{N}$ donc $\underline{p_0 = \operatorname{Min} \mathcal{T}(U) \text{ existe}}$.

$\diamond$ Montrons que $\underline{\mathcal{T}(U) = p_0.\mathbf{N}^* = \{p_0 k \mid k \in \mathbf{N}^*\}}$.

$\rightarrow$ Soit $p \in p_0.\mathbf{N}^*$, $p = p_0 k$. On a $p \neq 0$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+p} = u_{n+p_0k} = u_{n+p_0(k-1)} = \cdots = u_n$ donc $p \in \mathcal{T}(U)$.

$\rightarrow$ Soit $p \in \mathcal{T}(U)$. La division euclidienne par p_0 donne $p = p_0 k + r$ avec $r < p_0$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+p} = u_{n+p_0k+r} = u_{n+r}$, or $r \notin \mathcal{T}(U)$ puisque $r < p_0$ donc $r = 0$ et donc $p = p_0 k$.

$\diamond$ $\underline{\mathcal{T}(\Omega) = \mathbf{N}^*}$ est immédiat; $i^4 = 1$ donc $4 \in \mathcal{T}(C)$ et $p_0 \mid 4$ mais $c_1 = -1 \neq c_3 = 1$ donc $p_0 \notin \{1, 2\}$ et donc $\underline{\mathcal{T}(C) = 4\mathbf{N}^*}$.

b) $\mathcal{P} \neq \emptyset$ car, par exemple, $\Omega \in \mathcal{P}$. D'autre part, si $U \in \mathcal{P}$ et $p \in \mathcal{T}(U)$, on a $|u_n| \leq \operatorname{Max}\big(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{p-1}|\big)$ donc $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$. Enfin, si $(U, V) \in \mathcal{P}^2$, soit $p \in \mathcal{T}(U)$ et $q \in \mathcal{T}(V)$, posons $r = pq \in \mathcal{T}(U) \cap \mathcal{T}(V)$. On a $u_{n+r} + \lambda v_{n+r} = u_n + \lambda v_n$ donc $U + \lambda V \in \mathcal{P}$.

Donc $\underline{\mathcal{P} \text{ sev de } \mathcal{B}}$.

c) $\underline{\mathcal{P} \text{ n'est pas de dimension finie}}$ car la famille $(E_q)_{q \in \mathbf{P}}$, où $\mathbf{P}$ est l'ensemble infini des nombres premiers positifs, définie par : E_q est q-périodique, $E_q(0) = 1$ et, pour $r \in [\![1, q-1]\!]$, $E_q(r) = 0$, appartient à $\mathcal{P}$ et est libre.

En effet, si $\sum\limits_{q \in \mathbf{P}} \lambda_q E_q = 0$, on a $\forall n \in \mathbf{N},\ \sum\limits_{q \in \mathbf{P}} \lambda_q E_q(n) = 0$ et, en particulier, pour $n = q_0 \in \mathbf{P}$, on obtient $\lambda_{q_0} = 0$ car $E_q(q_0) \neq 0 \Leftrightarrow q \mid q_0$.

I-2°) a) $\diamond$ Soit $n = pq + r$ avec $r \in [\![0, p-1]\!]$. On a $A(U, p, n) = \dfrac{1}{p} \sum\limits_{k=0}^{p-1} u_{pq+r+k} = \dfrac{1}{p} \sum\limits_{k=0}^{p-1} u_{r+k} = \dfrac{1}{p} \sum\limits_{k=0}^{p-r-1} u_{r+k} + \dfrac{1}{p} \sum\limits_{k=p-r}^{p-1} u_{r+k} = \dfrac{1}{p} \sum\limits_{k=r}^{p-1} u_k + \dfrac{1}{p} \sum\limits_{k=0}^{r} u_{p+k}$ en posant $k := r+k$ dans la première somme et $k := r+k-p$ dans la seconde somme. Donc $A(U, p, n) = \dfrac{1}{p} \sum\limits_{k=r}^{p-1} u_k + \dfrac{1}{p} \sum\limits_{k=0}^{r} u_k = A(U, p, 0)$ donc $\underline{A(U, p, n) \text{ ne dépend pas de } n}$.

$\diamond$ Soit p_0 la plus petite période. On a $p = p_0 q$ et $A(U, p, n) = \dfrac{1}{p} \sum\limits_{k=0}^{p-1} u_{n+k} = \dfrac{1}{p_0 q} \sum\limits_{i=0}^{q-1} \sum\limits_{r=0}^{p_0-1} u_{n+ip_0+r} = \dfrac{1}{p_0 q} \sum\limits_{i=0}^{q-1} p_0 A(U, p_0, n + ip_0) = \dfrac{1}{q} \sum\limits_{i=0}^{q-1} A(U, p_0, n)$ par indépendance de n et donc $A(U, p, n) = A(U, p_0, n)$.

Donc $\underline{A(U, p, n) \text{ ne dépend pas de } p \in \mathcal{T}(U)}$.

b) $\underline{L(\Omega) = 1}$ et $L(C) = \dfrac{1}{4}(c_0 + c_1 + c_2 + c_3) = \dfrac{1}{4}(0 + (-1) + 0 + 1)$ soit $\underline{L(C) = 0}$.

c) Si $U \in \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1$, $U = \lambda \Omega$ alors $0 = L(U) = \lambda L(\Omega) = \lambda$ donc $U = 0$ et donc $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1 = \{0\}$. D'autre part, soit $U \in \mathcal{P}$, on peut écrire $U = L(U)\Omega + \big(U - L(U)\Omega\big)$ et $L\big(U - L(U)\Omega\big) = L(U) - L(U) = 0$ donc $U \in \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1$. On a donc $\underline{\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}_1}$.

I-3°) a) $\diamond$ Soit $p \in \mathcal{T}(U)$, $u'_{n+p} = u_{n+p+1} - u_{n+p} = u_{n+1} - u_n = u'_n$ donc $\underline{U' \in \mathcal{P}}$. La linéarité étant immédiate, on a donc $\underline{D \in \mathcal{L}(\mathcal{P})}$.

$\diamond$ $\underline{D(\Omega) = 0}$ et $D(C) = C'$ avec $\underline{c'_0 = -1,\ c'_1 = 1,\ c'_2 = 1,\ c'_3 = -1}$.

$\diamond$ $D(U) = 0 \Longleftrightarrow \forall n,\ u_{n+1} = u_n$ donc $\underline{\operatorname{Ker} D = \mathcal{P}_1}$.

$\diamond$ Soit $U' = D(U)$, on a vu ci-dessus que $p \in \mathcal{T}(U) \Rightarrow p \in \mathcal{T}(U')$. Soit un tel p, on a $L(U') = \frac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1}(u_{k+1} - u_k) = u_p - u_0 = 0$. Donc $\operatorname{Im} D \subset \operatorname{Ker} L = \mathcal{P}_0$. Réciproquement, soit $V \in \mathcal{P}_0$, posons $u_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k$. On a $\forall n,\ v_n = u_{n+1} - u_n$ et, de plus, si $p \in \mathcal{T}(V)$, on a, pour $n = 0$, $u_p = \sum\limits_{k=0}^{p-1} v_k = pL(V) = 0$ et, pour $n \geq 1$, $u_{n+p} = \sum\limits_{k=0}^{n+p-1} v_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k + \sum\limits_{k=n}^{n+p-1} v_k = u_n + pA(V,p,n) = u_n$. Donc $U \in \mathcal{P}$ et $V = D(U)$. En conclusion, $\underline{\operatorname{Im} D = \mathcal{P}_0}$.

b) $D(\mathcal{P}_0) \subset \operatorname{Im} D = \mathcal{P}_0$ donc $\underline{\mathcal{P}_0 \text{ est stable par } D}$. D'autre part, en notant D_0 l'endomorphisme de $\mathcal{P}_0$ induit par D, $\operatorname{Ker} D_0 = \operatorname{Ker} D \cap \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_0 = \{0\}$ donc $\underline{D_0 \in \mathrm{GL}(\mathcal{P}_0)}$.

c) Pour $U \in \mathcal{P}_0$, $D_0(U) = \lambda U \Longleftrightarrow \forall n,\ u_{n+1} - u_n = \lambda u_n$ soit $D_0(U) = \lambda U \Longleftrightarrow \forall n,\ u_{n+1} = (\lambda+1)u_n$ soit $\forall n,\ u_n = (\lambda+1)^n u_0$. La condition $U \in \mathcal{P}$ s'écrit, pour $u_0 \neq 0$ et $\lambda \neq -1$, $\exists\, p > 0,\ (\lambda+1)^p = 1$ et, dans ce cas, on a bien $L(U) = \frac{u_0}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1}(\lambda+1)^k = 0$ sauf si $\lambda + 1 = 1$ où $L(U) = u_0$ qui n'est nul que si $U = 0$.
Le cas $u_0 = 0$ donne $U = 0$ et le cas $\lambda + 1 = 0$ donne $\forall n \geq 1,\ u_n = 0$ qui n'est périodique que si $u_0 = 0$ soit $U = 0$.
En conclusion, $\underline{\operatorname{Sp}(D_0) = \left\{-1 + \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi n}{p}} \;\middle|\; p \in \mathbf{N}^*,\ k \in [\![1, p-1]\!]\right\}}$ et $\underline{E_\lambda = \mathbf{C}\cdot\big((\lambda+1)^n\big)_{n\in\mathbf{N}}}$.

I-4°) a) Soit $U \in \mathcal{P}_0$, on a, si $p \in \mathcal{T}(U)$, $\forall n,\ u^*_{n+p} = \sum\limits_{k=0}^{n+p} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k + \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k = u^*_n + pA(U,p,n+1) = u^*_n$ donc $U^* \in \mathcal{P}$. La linéarité étant évidente on obtient $\underline{\theta \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_0, \mathcal{P})}$.

b) $\diamond$ On a $u_0 = u^*_0$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = u^*_n - u^*_{n-1}$ donc $U^* = 0 \Rightarrow U = 0$ et donc $\underline{\operatorname{Ker}\theta = \{0\}}$.

$\diamond$ Si $V \in \operatorname{Im}\theta$, $V = \theta(U)$ alors $v_{p-1} = \sum\limits_{k=0}^{p-1} u_k = pA(U,p,0) = 0$. Réciproquement, soit $V \in \big\{U \in \mathcal{P} \;\big|\; u_{p-1} = 0\big\}$, posons $u_0 = v_0$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = v_n - v_{n-1}$. On a $\forall n,\ v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. De plus, soit $p \in \mathcal{T}(V)$, on a $\forall n \geq 1,\ u_{n+p} = v_{n+p} - v_{n+p-1} = v_n - v_{n-1} = u_n$ et, pour $n = 0$, $u_p = v_p - v_{p-1} = v_p = v_0 = u_0$ donc $U \in \mathcal{P}$. Donc $\underline{\operatorname{Im}\theta = \big\{U \in \mathcal{P} \;\big|\; u_{p-1} = 0\big\}}$.

Deuxième partie

II-1°) $\diamond$ Soit $p \in \mathcal{T}(U)$ et $r \in [\![0, p-1]\!]$. On a $u_{np+r} = u_r \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_r$. Donc s'il existe $r \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $u_r \neq 0$ alors u_n ne tend pas vers 0 et la série $(\sum u_k)$ diverge grossièrement. Par contre, si $\forall r \in [\![0, p-1]\!],\ u_r = 0$ alors, par périodicité, $\forall n,\ u_n = 0$ et $(\sum u_k)$ converge.
Donc $\underline{(\sum u_k) \text{ converge si et seulement si } U = 0}$.

$\diamond$ U est borné donc il existe M tel que $\left|\frac{u_n}{n^\alpha}\right| \leq \frac{M}{n^\alpha}$ et donc $\underline{(\sum u_k) \text{ est absolument convergente}}$.

II-2°)a) $\frac{1}{kp+j} = \frac{1}{kp(1+\frac{j}{pk})} = \frac{1}{kp}\big(1+\frac{j}{pk}\big)^{-1} = \frac{1}{kp}\big(1 - \frac{j}{pk} + o\big(\frac{1}{k}\big)\big)$.
Donc $\underline{\frac{1}{kp+j} = \frac{1}{kp} - \frac{j}{p^2k^2} + o\big(\frac{1}{k^2}\big)}$.

b) $w_k = \sum_{j=0}^{p-1} \dfrac{u_j}{kp+j} = \sum_{j=0}^{p-1}\left(\dfrac{u_j}{kp} - \dfrac{ju_j}{p^2k^2} + o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)\right)$

$= \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} u_j\right) - \dfrac{1}{k^2}\left(\dfrac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} ju_j\right) + o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$

$= \dfrac{L(U)}{k} - \dfrac{1}{k^2}\left(\dfrac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} ju_j\right) + o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$

Donc si $U \in \mathcal{P}\setminus\mathcal{P}_0$ on a $L(U) \neq 0$ et donc $w_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{L(U)}{k}$. Donc $\underline{\text{si } U \in \mathcal{P}\setminus\mathcal{P}_0,\ (\sum w_k) \text{ diverge}}$.

Par contre, puisque $(\sum \frac{1}{k^2})$ converge, $(\sum -\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} ju_j\right) + o(\frac{1}{k^2}))$ converge et donc $\underline{\text{si } U \in \mathcal{P}_0,\ (\sum w_k) \text{ converge}}$.

c) Puisque U est borné, $\lim \frac{u_n}{n} = 0$ et $(\sum w_k)$ est obtenue à partir de $(\sum v_n)$ par regroupement par paquets de taille bornée donc ces deux séries sont de même nature.
Donc $\underline{(\sum v_n) \text{ converge} \iff U \in \mathcal{P}_0}$.

II-3°)a) $C \in \mathcal{P}_0$ donc $S(C)$ existe et on peut écrire $S(C) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{j=1}^{4n} \dfrac{c_j}{j}\right)$.

Or $\sum_{j=1}^{4n} \dfrac{c_j}{j} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{c_{4k+1}}{4k+1} + \dfrac{c_{4k+2}}{4k+2} + \dfrac{c_{4k+3}}{4k+3} + \dfrac{c_{4k+4}}{4k+4}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{-1}{4k+1} + \dfrac{0}{4k+2} + \dfrac{1}{4k+3} + \dfrac{0}{4k+4}\right)$

$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\int_0^1 t^{4k}\,dt + \int_0^1 t^{4k+2}\,dt\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 (t^2-1)t^{4k}\,dt = \int_0^1 (t^2-1)\sum_{k=0}^{n-1} t^{4k}\,dt$

Or, pour $t^4 \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} t^{4k} = \dfrac{t^{4n}-1}{t^4-1}$, en particulier, pour $t \in [0,1[$, $(t^2-1)\sum_{k=0}^{n-1} t^{4k} = \dfrac{t^{4n}-1}{t^2+1}$, mais ceci est vrai aussi en $t=1$ donc $\sum_{j=1}^{4n}\dfrac{c_j}{j} = \int_0^1 \dfrac{t^{4n}-1}{t^2+1}\,dt = -\int_0^1 \dfrac{1}{t^2+1}\,dt + \int_0^1 \dfrac{t^{4n}}{t^2+1}\,dt$. Mais $0 \leq \int_0^1 \dfrac{t^{4n}}{t^2+1}\,dt \leq \int_0^1 t^{4n}\,dt = \dfrac{1}{4n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc en passant à la limite :

$$\underline{S(C) = -\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt = -\frac{\pi}{4}}$$

b) $T \in \mathcal{P}_0$ donc $S(T)$ existe et on a $S(T) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{j=1}^{np}\dfrac{t_j}{j}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{j=1}^{np}\dfrac{1}{j} - p\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{pj}\right)$.

Or $\sum_{j=1}^{np}\dfrac{1}{j} - p\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{pj} = \sum_{j=1}^{np}\dfrac{1}{j} - \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{j} = \ln(np) + \gamma + o(1) - (\ln(n) + \gamma + o(1))$.
Donc $\underline{S(T) = \ln(p)}$.

Troisième partie

III-1°) $\diamond$ Soit $U \in \mathcal{P}$ et $p \in \mathcal{T}(U)$, on a $|L(U)| = \left|\dfrac{1}{p}\sum_{k=0}^{n} u_{n+k}\right| \leq \dfrac{1}{p}\sum_{k=0}^{n}|u_{n+k}| \leq \dfrac{1}{p}\sum_{k=0}^{n}\|U\|_\infty$. Donc $\underline{|L(U)| \leq \|U\|_\infty}$ et donc $\underline{L \text{ est continue sur } \mathcal{P}}$.

$\diamond$ On a, d'après ci-dessus, $\|L\| \leq 1$ mais, pour la suite constante Ω, $|L(\Omega)| = 1 = \|\Omega\|_\infty$. Donc $\underline{\|L\| = 1}$.

$\diamond$ On a $\mathcal{P}_0 = \operatorname{Ker} L = L^{-1}(\{0\})$, or L est continue de $\mathcal{P}$ dans $\mathbf{C}$ et $\{0\}$ est un fermé de $\mathbf{C}$ donc, en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue, $\underline{\mathcal{P}_0 \text{ est un fermé de } \mathcal{P}}$.

III-2°) ◇ Soit $U \in \mathcal{P}$ et $U' = D(U)$, $\forall n, |u'_n| = |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2\|U\|_\infty$ donc $\|U'\|_\infty \leq 2\|U\|_\infty$ donc D est continue sur $\mathcal{P}$.

◇ De plus, $\|D\| \leq 2$ mais on a vu au **I-3°) c)** que $-2 \in \mathrm{Sp}(D_0) \subset \mathrm{Sp}(D)$ (obtenu,par exemple, pour $p = 2$ et $k = 1$) et, en prenant $U \in E_{-2} = \mathbf{C} \cdot \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et $U \neq 0$, on a $\|D(U)\|_\infty = 2\|U\|_\infty$. Donc $\|D\| = 2$.

III-3°) Soit $q \in \mathbf{N}^*$ et Z la suite (qui sera utilisée également plus bas) définie par :

→ Z est $2q$-périodique,

→ pour $n \in [\![1, q]\!]$, $z_n = 1$, et, pour $n \in [\![q+1, 2q]\!]$, $z_n = -1$.

On a $A(Z, 2q, 1) = q - q = 0$ donc $Z \in \mathcal{P}_0$, $\|Z\|_\infty = 1$ et, si $Z^* = \theta(Z)$, $z^*_q = \sum_{k=0}^{q} z_k = -1 + q.1 = q - 1$ donc $\|Z^*\|_\infty \geq q - 1$. Donc $\forall M \geq 0,\ \exists\, q,\ |D(Z)| > M = M.\|Z\|_\infty$.
Donc θ n'est pas continue sur $\mathcal{P}_0$.

III-4°)a) ◇ $\forall t \in [0, 1[$, $\dfrac{1 - t^q}{(1-t)(1+t^q)} = \sum_{k=0}^{q-1} \dfrac{t^k}{1+t^q}$ qui se prolonge par continuité en 1 et donc I_q existe .

◇ $I_q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \int_0^1 \frac{t^k}{1+t^q}\, dt$ or, pour $k \in [\![0, q-1]\!]$, $\forall t \in [0, 1]$, $t^q \leq t^{k+1}$ donc $0 \leq 1 + t^q \leq 1 + t^{k+1}$ et donc $\dfrac{t^k}{1+t^{k+1}} \leq \dfrac{t^k}{1+t^q}$.

On a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{1+t^q}\, dt \geq \int_0^1 \frac{t^k}{1+t^{k+1}}\, dt = \left[\frac{1}{k+1}\ln\left(1+t^{k+1}\right)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{k+1}$ donc $I_q \geq \ln(2) \sum_{k=0}^{q-1} \dfrac{1}{k+1} \xrightarrow[q\to+\infty]{} +\infty$ donc $I_q \xrightarrow[q\to+\infty]{} +\infty$.

b)

$$
\begin{aligned}
V_N &= \sum_{n=1}^{2qN} \frac{z_n}{n} = \sum_{p=0}^{N-1} \left(\sum_{r=1}^{q} \left[\frac{z_{2pq+r}}{2pq+r} + \frac{z_{2pq+q+r}}{2pq+q+r} \right] \right) \\
&= \sum_{p=0}^{N-1} \left(\sum_{r=1}^{q} \left[\frac{1}{2pq+r} - \frac{1}{2pq+q+r} \right] \right) = \sum_{p=0}^{N-1} \left(\sum_{r=1}^{q} \left[\int_0^1 t^{2pq+r-1}\, dt - \int_0^1 t^{2pq+q+r-1}\, dt \right] \right) \\
&= \sum_{p=0}^{N-1} \left(\sum_{r=1}^{q} \int_0^1 (1-t^q) t^{2pq} t^{r-1}\, dt \right) = \sum_{p=0}^{N-1} \int_0^1 (1-t^q) t^{2pq} \sum_{r=1}^{q} t^{r-1}\, dt \\
&= \sum_{p=0}^{N-1} \int_0^1 (1-t^q) t^{2pq} \frac{1-t^q}{1-t}\, dt = \int_0^1 \frac{(1-t^q)^2}{1-t} \sum_{p=0}^{N-1} \left(t^{2q}\right)^p dt \\
&= \int_0^1 \frac{(1-t^q)^2}{1-t} \frac{1-t^{2qN}}{1-t^{2q}}\, dt = \int_0^1 \frac{1-t^q}{(1-t)(1+t^q)} (1 - t^{qN})\, dt = I_q - \int_0^1 \frac{1-t^q}{(1-t)(1+t^q)} t^{qN}, dt
\end{aligned}
$$

(toutes les égalités ci-dessus sont valables comme au **II-3°** car les égalités entre fonctions à intégrer sont valables en $t = 1$ par continuité)

Or $0 \leq \int_0^1 \dfrac{1-t^q}{(1-t)(1+t^q)} t^{qN}, dt = \sum_{k=0}^{q-1} \int_0^1 \dfrac{t^k}{1+t^q} t^{qN}\, dt \leq \sum_{k=0}^{q-1} \int_0^1 t^{qN}\, dt = \dfrac{q}{qN+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$

Donc $V_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} I_q$.

c) Comme $Z \in \mathcal{P}_0$, $V_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} S(Z)$ donc $S(Z) = I_q$ et $|I_q| \xrightarrow[q\to+\infty]{} +\infty$ donc $\forall M \geq 0,\ \exists\, q,\ |S(Z)| > M = M.\|Z\|_\infty$.
Donc S n'est pas continue sur $\mathcal{P}_0$.

* * *
* *
*