95 - MATH. I

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1995

MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
OPTIONS M ET P'
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I.
L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 4 pages.
Ce problème est consacré à l'étude de suites complexes périodiques. Par définition, une suite complexe $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique si et seulement s'il existe un entier naturel p, différent de 0, tel que, pour tout entier naturel n, l'égalité
$$u_{n+p} = u_n$$
a lieu. L'entier p est appelé période de la suite U. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble de ces suites.
La première et la deuxième partie définissent les applications linéaires L, D, θ, S et les sous-espaces vectoriels $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ de l'espace vectoriel $\mathscr{P}$. Elles étudient les noyaux et les espaces images de ces applications. La troisième partie s'intéresse à leur continuité.

Première partie.

Désignons par $\mathscr{B}$ l'ensemble des suites complexes $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées. Admettons que $\mathscr{B}$ soit un espace vectoriel complexe et que l'application de $\mathscr{B}$ dans $\mathbb{R}$, $V \mapsto \|V\|_\infty = \sup_{n\geqslant 0} |v_n|$, soit une norme.

I-1°) Premières propriétés de l'ensemble $\mathscr{P}$ des suites complexes périodiques :

a. Désignons par $\mathscr{T}(U)$ l'ensemble des périodes d'une suite complexe périodique U. Démontrer l'existence d'une plus petite période p_0 ; caractériser l'ensemble $\mathscr{T}(U)$. Déterminer les ensembles $\mathscr{T}(\Omega)$ et $\mathscr{T}(C)$ relatifs aux deux suites définies ci-dessous :

$\Omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout n, $\omega_n = 1$; $C = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout n, $c_n = \Re i^{n+1}$.

b. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{P}$ des suites complexes périodiques est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{B}$.

c. Cet espace vectoriel $\mathscr{P}$ est-il de dimension finie ?

Étant donnés une suite U de $\mathscr{P}$ et deux entiers naturels p et n, désignons par $A(U,p,n)$ le nombre complexe défini par la relation : $A(U,p,n) = \dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1} u_{n+k}$.

I-2°) Décomposition de $\mathscr{P}$ en somme directe.

a. Démontrer que pour une suite U donnée de $\mathscr{P}$, le nombre complexe $A(U,p,n)$ ne dépend ni de l'entier naturel n, ni de la période p de U (p appartient à $\mathscr{T}(U)$).

Pour une suite U donnée de $\mathscr{P}$, soit $L(U)$ la valeur commune de ces nombres complexes $A(U,p,n)$; désignons par L la forme linéaire : $U \mapsto L(U)$.

b. Calculer $L(\Omega)$ et $L(C)$; Ω et C sont les suites définies à la question **I- 1 ° a**.

c. Soit $\mathscr{P}_0$ le noyau de la forme linéaire L. Soit $\mathscr{P}_1$ le sous-espace vectoriel engendré par la suite Ω définie à la question **I- 1 ° a** ; démontrer que l'espace vectoriel $\mathscr{P}$ est égal à la somme directe des deux sous-espaces vectoriels $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$: $\mathscr{P} = \mathscr{P}_0 \oplus \mathscr{P}_1$.

I-3 °) Étude d'un endomorphisme D_0 de $\mathscr{P}_0$.

À tout élément $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{P}$, associons la suite $U' = (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u'_n = u_{n+1} - u_n.$$

a. Démontrer que, pour tout U de $\mathscr{P}$, la suite U' appartient à $\mathscr{P}$. Soit D l'application : $U \mapsto U'$; établir que D est un endomorphisme de $\mathscr{P}$. Déterminer les images $D(\Omega)$ et $D(C)$ des suites définies à la question **I-1 ° a**. Quels sont les noyau et espace image de l'endomorphisme D ?

b. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathscr{P}_0$ est stable par D et que la restriction de D à $\mathscr{P}_0$ est un automorphisme, qui est noté D_0.

c. Déterminer toutes les valeurs propres de cet automorphisme D_0 de $\mathscr{P}_0$; préciser des éléments de $\mathscr{P}_0$ qui sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

I-4 °) Étude d'une application linéaire de $\mathscr{P}_0$ dans $\mathscr{P}$.

À tout élément $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{P}$, associons la suite $U^* = (u^*_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u^*_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

a. Démontrer que l'application $\theta : U \mapsto U^*$ est une application linéaire de $\mathscr{P}_0$ dans $\mathscr{P}$.

b. Déterminer le noyau et l'espace image de cette application linéaire θ.

Deuxième partie

Soient $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathscr{P}$ et α un réel supérieur ou égal à 1. L'objet de cette partie est d'étudier la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n^\alpha}$, $n \geqslant 1$, et de considérer la forme linéaire S qui, à un élément U de $\mathscr{P}_0$, associe le nombre complexe $S(U)$ défini par la relation : $S(U) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$.

II-1 °) Soient $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathscr{P}$ et α un réel strictement supérieur à 1. Quelle est la nature de la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$? Quelle est celle de la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n^\alpha}$, $n \geqslant 1$?

II-2 °) Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathscr{P}$ de période p ; supposons le réel α égal à 1 ; pour étudier la convergence de la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n}$, $n \geqslant 1$, considérons les nombres complexes w_k, $k \geqslant 1$, définis par la relation :

$$w_k = v_{kp} + v_{kp+1} + \cdots + v_{kp+p-1} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{u_j}{kp+j}.$$

a. En supposant les deux entiers p et j donnés ($p > 0$, $j \geqslant 0$), déterminer le développement limité à l'ordre 2 par rapport à $\dfrac{1}{k}$ de l'expression $\dfrac{1}{kp+j}$, lorsque l'entier k croît indéfiniment.

b. En déduire la nature de la série de terme général w_k, $k \geqslant 1$, lorsque la suite U appartient à $\mathscr{P}$ sans appartenir à $\mathscr{P}_0$ puis, lorsque la suite U appartient à $\mathscr{P}_0$.

c. En déduire la nature de la série de terme général v_n, $n \geqslant 1$; discuter sa convergence suivant que la suite U appartient ou non à l'ensemble $\mathscr{P}_0$.

Désormais, désignons par S la forme linéaire qui, à une suite U appartenant à $\mathscr{P}_0$, fait correspondre le réel $S(U) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{n}$.

II-3 °) <u>Deux exemples :</u>

a. Soit $C = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie à la question **I-1 ° a**. Calculer $S(C)$. Une méthode, parmi d'autres, consiste à utiliser la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } k,\ \int_0^1 t^k \ \mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}.$$

b. Soit $T = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de période p, dont les termes t_n, $n \in \mathbb{N}$, sont définis par les relations :

pour tout entier r compris entre 1 et $p-1$, $1 \leqslant r \leqslant p-1$, $t_r = 1$; $t_p = 1-p$.

Déterminer $S(T)$ en supposant connu le résultat : il existe une constante γ telle que :

$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, lorsque l'entier n croît indéfiniment.

Troisième partie

D'après les résultats admis et la question **I-1 ° b**, le couple $(\mathscr{P}, \| \ \|_\infty)$ est un espace vectoriel normé. Le sous-espace vectoriel $\mathscr{P}_0$ de $\mathscr{P}$ est muni de la même norme. L'objet de cette partie est d'étudier la continuité des applications linéaires L, D, θ et S. Rappelons que, si T est une application lipschitzienne d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_E)$ dans un espace vectoriel normé $(F, \| \ \|_F)$, sa norme est définie par la relation :

$$\|T\| = \sup_{x\in E} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

III-1 °) Démontrer que la forme linéaire L est lipschitzienne. Déterminer sa norme. Le sous-espace vectoriel $\mathscr{P}_0$ est-il fermé dans $\mathscr{P}$?

III-2 °) Cette application linéaire D de $\mathscr{P}$ dans lui-même est-elle lipschitzienne ? Déterminer éventuellement sa norme.

III-3 °) L'application linéaire θ de $\mathscr{P}_0$ dans $\mathscr{P}$ est-elle lipschitzienne ?

III-4 °) <u>Étude de la continuité de la forme linéaire S :</u>

Dans cette question, q est un entier donné strictement positif.

a. Soit I_q l'intégrale définie par la relation : $I_q = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^q}{(1-t)(1+t^q)} \ \mathrm{d}t$.

Étudier la définition de l'intégrale I_q et la convergence de la suite réelle $(I_q)_{q\geqslant 1}$ lorsque l'entier q croît indéfiniment.

b. Soit $Z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite appartenant à $\mathscr{P}$, de période $2q$ dont les termes z_n, $n \in \mathbb{N}$, sont définis par les relations :

pour tout entier n compris entre 1 et q : $1 \leqslant n \leqslant q$, $z_n = 1$,

pour tout entier n compris entre $q+1$ et $2q$: $q+1 \leqslant n \leqslant 2q$, $z_n = -1$.

Étant donné un entier N strictement positif, soit V_N le réel défini par la relation

$$V_N = \sum_{n=1}^{2qN} \frac{z_n}{n}.$$

Étudier la convergence de la suite réelle $(V_N)_{N\geqslant 1}$.

c. Déduire des résultats précédents que la forme linéaire S définie sur $\mathscr{P}_0$, n'est pas lipschitzienne.

FIN DU PROBLÈME