CONCOURS COMMUN 1996
DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES
Epreuve spécifique de Mathématiques - Corrigé (Patrick BERGEON)

Problème 1

Première partie

1-) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \dfrac{p_{n+1}}{p_n} = u_{n+1}$.

Si le produit (p_n) converge alors il existe un réel λ non nul tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lambda$.

Dans ce cas, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{p_n}{p_{n-1}} = \dfrac{\lambda}{\lambda} = 1$.

$\boxed{\text{Pour que le produit } (p_n) \text{ converge, il est nécessaire que la suite } (u_n) \text{ converge vers } 1}$.

2-) On raisonne par récurrence .

→ $p_1 = 1 + \dfrac{1}{1} = 2 = 1 + 1$ donc l'égalité est vraie pour $n = 1$.

→ Si, pour un indice n donné ($n \geq 1$), $p_n = n + 1$

alors $p_{n+1} = p_n.\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) = (n+1).\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) = n + 2$ d'où l'hérédité.

Donc $\boxed{\forall n \geq 1,\quad p_n = \prod\limits_{p=1}^{n}\left(1 + \dfrac{1}{p}\right) = n + 1}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$, $\boxed{\text{le produit } p_n = \prod\limits_{p=1}^{n}\left(1 + \dfrac{1}{p}\right) \text{ diverge}}$.

3-) Pour $n = 1$, $p_1.\sin\left(\dfrac{a}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{a}{2}\right).\sin\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1}{2}.\sin a$.

Pour $n = 2$, $p_2.\sin\left(\dfrac{a}{4}\right) = p_1.\cos\left(\dfrac{a}{4}\right).\sin\left(\dfrac{a}{4}\right) = p_1.\dfrac{1}{2}.\sin\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1}{2^2}.\sin a$.

On fait la conjecture: $\forall n \geq 1,\ p_n.\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2^n}.\sin a$ et on la vérifie par récurrence.

→ Elle est vraie pour $n = 1$.

→ Si, pour un indice n donné ($n \geq 1$), $p_n.\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2^n}.\sin a$

alors $p_{n+1}.\sin\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right) = p_n.\cos\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right).\sin\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right) = p_n.\dfrac{1}{2}.\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2^n}.\sin a = \dfrac{1}{2^{n+1}}.\sin a$

d'où l'hérédité.

Donc: $\boxed{\forall n \geq 1,\ p_n.\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2^n}.\sin a}$.

Par suite, $p_n = \dfrac{\sin a}{2^n.\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right)}$ et, comme $\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right) \sim \dfrac{a}{2^n}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{\sin a}{a} \neq 0$ car $a \notin \pi\mathbb{Z}$.

Donc: $\boxed{\text{si } a \notin \pi\mathbb{Z} \text{ alors } \prod \cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right) \text{ converge et } \prod\limits_{n \geq 1} \cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = \dfrac{\sin a}{a}}$.

Deuxième partie

1- a) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1 \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ 1 - \varepsilon \leq u_n \leq 1 + \varepsilon.$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ 0 < \frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

Donc: $\boxed{\text{si } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1 \text{ alors } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n > 0}$.

1- b) $\forall n \geq n_0,\quad p_n = \prod\limits_{p=1}^{n_0-1} u_p \times \prod\limits_{p=n_0}^{n} u_p = A.\prod\limits_{p=n_0}^{n} u_p$ en notant A le nombre réel *fixe* non nul $\prod\limits_{p=1}^{n_0-1} u_p$.

On peut remarquer que, comme tous les u_p sont strictement positifs pour $p \geq n_0$ alors A et p_n sont non nuls et de même signe.

$\forall n \geq n_0,\quad p_n = A.\prod\limits_{p=n_0}^{n} \exp[\ln(u_p)] = A.\exp\left[\sum\limits_{p=n_0}^{n} \ln(u_p)\right] = A.\exp(S_n)$ et $S_n = \ln\left(\frac{p_n}{A}\right)$.

→ Si (S_n) converge vers un réel λ alors (p_n) converge vers le réel non nul $A.e^{\lambda}$.

→ Si (p_n) converge vers un réel non nul α alors (S_n) converge vers $\ln\left(\frac{\alpha}{A}\right)$.

Par suite: $\boxed{(S_n) \text{ converge} \iff (p_n) \text{ converge}}$.

Plus précisément: $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lambda \iff \lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \left(\prod\limits_{p=1}^{n_0-1} u_p\right) \times e^{\lambda}}$.

2-) Si $u_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.

Les hypothèses de la question précédente sont donc vérifiées avec $n_0 = 1$.

2- a) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ est négatif si et seulement si $x > e$.

Donc $\forall p \geq 3,\ \varphi : x \in [p, p+1] \longmapsto \frac{\ln x}{x}$ est décroissante.

On en déduit que: $\forall p \geq 3,\ \forall x \in [p, p+1],\ \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln p}{p}$.

Par positivité de l'intégrale, $\forall p \geq 3,\ \int_p^{p+1} \frac{\ln x}{x}\, dx \leq \int_p^{p+1} \frac{\ln p}{p}\, dx = \frac{\ln p}{p}$

Donc: $\boxed{\forall p \geq 3,\ \int_p^{p+1} \frac{\ln x}{x}\, dx \leq \frac{\ln p}{p}}$.

2- b) $\forall n \geq 3,\ S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} = \frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \sum\limits_{p=3}^{n} \frac{\ln p}{p} \geq \frac{\ln 2}{2} + \sum\limits_{p=3}^{n} \left(\int_p^{p+1} \frac{\ln x}{x}\, dx\right) = \frac{\ln 2}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x}\, dx$

Donc: $\forall n \geq 3,\ S_n \geq \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2 3}{2}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2 3}{2}\right) = +\infty$ alors $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$.

D'où (S_n) diverge et, par suite, $\boxed{\prod \sqrt[n]{n} \text{ diverge}}$.

Troisième partie

1- a) Soit $\psi: x \geq 0 \longmapsto x - \ln(1+x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\psi'(x) = \dfrac{x}{1+x} \geq 0$ et $\psi'(x)$ ne s'annule qu'en 0.

Par suite, ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x > 0$, $\psi(x) > \psi(0)$.

Comme $\psi(0) = 0$, $\forall x > 0$, $\psi(x) > 0$. Autrement dit: $\boxed{\forall x > 0,\ \ln(1+x) < x}$.

1- b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S'_{n+1} - S'_n = v_n > 0$ donc $\boxed{(S'_n) \text{ est croissante}}$.

1- c) $\rightarrow$ La suite (p_n) est à termes positifs et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + v_{n+1} > 1$ donc elle est croissante.

$\rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(p_n) = \sum_{p=1}^{n} \ln(1+v_p) \leq \sum_{p=1}^{n} v_p = S'_n$.

Comme la suite (S'_n) est croissante, si elle converge vers un réel σ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S'_n \leq \sigma$.

Dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(p_n) \leq \sigma$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leq e^{\sigma}$ donc (p_n) est majorée.

On en déduit que: $\boxed{\text{si } (S'_n) \text{ converge alors } (p_n) \text{ converge}}$.

2-) On a vu dans I-2 que $\prod \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ diverge.

Par contraposition de la relation précédente, $\boxed{\text{la série harmonique diverge}}$.

3- a) $\rightarrow$ Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + a^{2^n}) = +\infty$ donc (p_n) diverge.

$\rightarrow$ Si $a = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + a^{2^n}) = 2 \neq 1$ donc (p_n) diverge.

Donc $\boxed{\text{si } a \geq 1 \text{ alors } (p_n) \text{ diverge}}$.

3- b) Si $a \in]0, 1[$, les hypothèses du III-1 sont vérifiées avec $v_n = a^{2^n} > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} a^{2^n} = 0$.

$\rightarrow$ S'_n est une série géométrique de raison (a^2) avec $|a^2| < 1$ donc (S'_n) est convergente.

Par suite, $\boxed{(p_n) \text{ converge}}$.

$\rightarrow$
- $(1 - a^2)p_1 = (1 - a^2)(1 + a^2) = 1 - a^4 = 1 - a^{2^2}$.
- $(1 - a^2)p_2 = (1 - a^2)(1 + a^2)(1 + a^4) = (1 - a^4)(1 + a^4) = 1 - a^8 = 1 - a^{2^3}$.

Une récurrence immédiate donne $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1 - a^2)p_n = 1 - a^{2^{n+1}}$.

On en déduit que: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a^2}}$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{1}{1 - a^2}}$.

Problème 2

Première partie

I-A 1) Pour la matrice M, $\begin{cases} C_2 = C_1 \\ C_4 = -C_3 \\ (C_1, C_4) \text{ est libre} \end{cases}$ donc $\boxed{\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(M) = 2}$.

La famille libre (C_1, C_4) donne immédiatement: $\boxed{(e_1 - e_2, e_3 - e_4) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(u)}$.

Le théorème du rang donne $\dim[\mathrm{Ker}(u)] = 2$.

$\begin{cases} C_1 = C_2 \text{ donne } u(e_1) = u(e_2) \text{ d'où } (e_1 - e_2) \in \mathrm{Ker}(u) \\ C_3 = -C_4 \text{ donne } u(e_3) = -u(e_4) \text{ d'où } (e_3 + e_4) \in \mathrm{Ker}(u) \end{cases}$

Comme la famille $(e_1 - e_2, e_3 + e_4)$ est libre, $\boxed{(e_1 - e_2, e_3 + e_4) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(u)}$.

Note: comme $e_1 - e_2 \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$, la somme $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$ n'est pas directe.

I-A 2) $M = \begin{pmatrix} B & O_2 \\ O_2 & C \end{pmatrix}$ avec $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = O_2$ et $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -2C$.

En travaillant par blocs, on obtient:

$$M^2 = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & -2C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = -2A \quad \text{avec} \quad \boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & 4C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} = 4A$$

Ce qui amène à la conjecture $\forall p \geq 2,\ M^p = (-2)^{p-1}.A$ que l'on vérifie par récurrence.

→ Elle est vraie pour $p = 2$.

→ Si, pour un exposant p donné ($p \geq 2$), $M^p = (-2)^{p-1}.A$

alors $M^{p+1} = M^p.M = (-2)^{p-1}.\begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & O_2 \\ O_2 & C \end{pmatrix} = (-2)^{p-1}.\begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & -2C \end{pmatrix} = (-2)^p\begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & C \end{pmatrix}$

soit $M^{p+1} = (-2)^p.A$ d'où l'hérédité.

Donc $\boxed{\forall p \geq 2,\ M^p = (-2)^{p-1}.A}$.

I-A 3-a) → On examine les vecteurs colonnes de M^2 et M^3 donc de $-2A$ et de $4A$.
Les deux premières colonnes sont nulles et les deux dernières sont opposées
d'où $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Im}(u^3) = \mathrm{Vect}(u^2(e_3)) = \mathrm{Vect}(e_3 - e_4)$
et, comme $e_3 - e_4 \neq 0_E$, $\boxed{(e_3 - e_4) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Im}(u^3)}$.

→ Le théorème du rang donne alors $\dim[\mathrm{Ker}(u^2)] = \dim[\mathrm{Ker}(u^3)] = 3$.

Or $\begin{cases} u^2(e_1) = u^3(e_1) = 0_E \\ u^2(e_2) = u^3(e_2) = 0_E \\ u^2(e_3 + e_4) = u^3(e_3 + e_4) = 0_E \end{cases}$ et, comme la famille $(e_1, e_2, e_3 + e_4)$ est libre,

$\boxed{(e_1, e_2, e_3 + e_4) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^3)}$.

I-A 3-b) Comme $M^p = \alpha_p.A$ avec $\alpha_p \neq 0$, en raisonnant comme ci-dessus, il vient:

$\boxed{\forall k \geq 2, \quad \mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Vect}(e_3 - e_4) \text{ et } \mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3 + e_4)}$.

I-A 3-c) $(e_1, e_2, e_3 + e_4)$ est une base de $\mathrm{Ker}(u^2)$ et $(e_3 - e_4)$ est une base de $\mathrm{Im}(u^2)$.

Comme $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$

en juxtaposant ces deux bases, on obtient $(e_1, e_2, e_3 + e_4, e_3 - e_4)$ qui est une base de E.

Par suite: $\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u^2) \oplus \mathrm{Im}(u^2)}$.

I-B 1-) → $\mathrm{Ker}(d) = \mathbb{K}_0[X]$ n'est pas réduit au polynôme nul donc $\boxed{d \text{ n'est pas injective}}$.

→ $\forall \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X], \quad \mathrm{P} = d\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}\right)$ donc $\mathrm{P} \in \mathrm{Im}(d)$

et, par suite, $\boxed{d \text{ est surjective}}$.

→ Si $\mathbb{K}[X]$ était de dimension finie, comme d est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{K}[X]$ alors d serait aussi injectif, ce qui n'est pas le cas.

Donc $\boxed{\mathbb{K}[X] \text{ n'est pas de dimension finie}}$.

I-B 2-) $\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}(d^q) \iff d^q(\mathrm{P}) = \mathrm{O} \iff \mathrm{P}^{(q)} = \mathrm{O} \iff \mathrm{P} \in \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

Donc: $\boxed{\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{Ker}(d^q) = \mathbb{K}_{q-1}[X]}$.

Deuxième partie

II-1) → $\forall p \in \mathbb{N}$, si $x \in K_p$ alors $u^p(x) = 0_\mathrm{E}$ d'où $u^{p+1}(x) = u[u^p(x)] = u(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}$ donc $x \in K_{p+1}$.

Par suite, $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_p \subset K_{p+1}}$.

→ $\forall p \in \mathbb{N}$, si $x \in I_{p+1}$ alors il existe $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = u^{p+1}(y)$ d'où $x = u^p[u(y)] \in I_p$.

Par suite, $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{p+1} \subset I_p}$.

II-2) → Si E est de dimension finie et si u est injectif alors u est un automorphisme de E.

Par suite: $\forall p \in \mathbb{N}$, u^p est un automorphisme de E.

Donc $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \ K_p = \{0_\mathrm{E}\} \ \text{ et } \ I_p = \mathrm{E}}$.

II-3 a-) On a vu que: $\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_p \subset K_{p+1}$ ce qui entraîne $\dim(K_p) \leq \dim(K_{p+1})$.

Et $K_p = K_{p+1} \iff \dim(K_p) = \dim(K_{p+1})$.

Si on n'avait jamais, $K_p = K_{p+1}$ on aurait toujours $\dim(K_p) < \dim(K_{p+1})$

et la suite $(\dim(K_p))$ strictement croissante d'entiers naturels tendrait vers $+\infty$.

C'est impossible car K_p étant un sous-espace vectoriel de E, $\dim(K_p) \leq \dim(\mathrm{E}) = n$.

Donc: $\boxed{\text{il existe un plus petit entier naturel } r \leq n \text{ tel que: } K_r = K_{r+1}}$.

II-3 b-) → Le théorème du rang donne alors $\dim(I_r) = n - \dim(K_r) = n - \dim(K_{r+1}) = \dim(I_{r+1})$ et, comme $I_{r+1} \subset I_r$, $\boxed{I_r = I_{r+1}}$.

→ On va montrer par récurrence sur p que: $\forall p\in \mathbb{N},\ K_{r+p} = K_r$.

- C'est vrai pour $p = 0$ et pour $p = 1$.
- Si, pour un naturel p ($p \geq 1$), $K_{r+p} = K_r$ alors comme on sait que $K_{r+p} \subset K_{r+p+1}$ donc il suffit de montrer que $K_{r+p+1} \subset K_{r+p}$ pour conclure que: $K_{r+p+1} = K_{r+p} = K_r$.
  Soit $x\in K_{r+p+1}$, $u^{r+p+1}(x) = u^{r+1}[u^p(x))] = 0_E$ donc $u^p(x)\in K_{r+1} = K_r$.
  Par suite, $u^r[u^p(x)] = u^{r+p}(x) = 0_E$ et $x\in K_{r+p}$ ce qui donne $K_{r+p+1} \subset K_{r+p}$.

Donc: $\boxed{\forall p\in \mathbb{N},\ K_{r+p} = K_r}$.

→ Le théorème du rang donne alors $\dim(I_{r+p}) = n - \dim(K_{r+p}) = n - \dim(K_r) = \dim(I_r)$ et, comme $I_{r+p} \subset I_r$, $\boxed{\forall p\in \mathbb{N},\ I_{r+p} = I_r}$.

II-3 c-) Le théorème du rang donne: $\dim(K_r) + \dim(I_r) = \dim(E)$.
Il suffit donc de montrer que: $K_r \cap I_r = \{0_E\}$.

Soit $x\in K_r \cap I_r$, $u^r(x) = 0_E$ et il existe $y\in E$ tel que: $x = u^r(y)$.
Donc $u^{r+r}(y) = u^r[u^r(x)] = u^r(0_E) = 0_E$. Par suite, $y\in K_{r+r} = K_r$ et $x = u^r(y) = 0_E$.

On en déduit que $K_r \cap I_r = \{0_E\}$ donc que $\boxed{E = K_r \oplus I_r}$.

II-4) L'endomorphisme d proposé dans la question I-B 2-) montre que ce n'est pas le cas !