ÉLECTROCINÉTIQUE

chapitre 2

Circuits linéaires en régime continu

Dans ce chapitre, on se place uniquement dans le cas des régimes continus : les tensions et les intensités dans le circuit sont constantes. Les circuits peuvent alors être analysés à l'aide de deux théorèmes, appelées les *lois de Kirchhoff*, qui reposent sur deux propriétés physiques fondamentales : la conservation de la charge (loi des nœuds), et l'unicité du potentiel en un point (loi des mailles).

Ces deux théorèmes peuvent se décliner sous plusieurs formes plus ou moins adaptées à un problème particulier. En outre, on peut montrer à partir d'eux que des associations complexes de dipôles peuvent être décrites en terme de dipôles équivalents, plus simples d'utilisation.

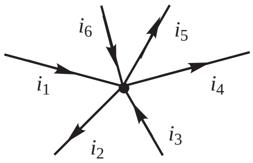
Plan du chapitre.

1. Théorèmes fondamentaux ; lois de Kirchhoff
   - 1.1 Loi des nœuds (première loi de Kirchhoff)
   - 1.2 Loi des mailles (seconde loi de Kirchhoff)
   - 1.3 Loi de Pouillet
   - 1.4 Théorème de Millman
   - 1.5 Diviseur de tension et diviseur de courant
2. Association de résistances
   - 2.1 Association en série
   - 2.2 Association en parallèle
   - 2.3 Exemple d'application
3. Association de dipôles actifs
   - 3.1 Association en série
   - 3.2 Association en parallèle
   - 3.3 Exemple d'application

1 Théorèmes fondamentaux ; lois de Kirchhoff.

1.1 Loi des nœuds (première loi de Kirchhoff).

Un **nœud** est un point auquel plusieurs conducteurs se rejoignent. Comme en aucun autre point d'un conducteur, il ne peut y avoir accumulation de charge au niveau du nœud. En conséquence, la conservation de la charge impose que, pendant un intervalle de temps dt, la quantité de charges arrivant au nœud soit égale à la quantité de charges en repartant. En d'autres termes, l'intensité du courant total arrivant au nœud est égale à l'intensité du courant total partant du nœud.



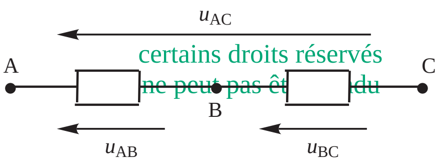
Considérons un nœud constitué de la jonction de N branches. En appelant i_k le courant de la branche k, la relation algébrique suivante, appelée **loi des nœud**, s'applique :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \epsilon_k \, i_k = 0} \qquad (1)$$

où $\epsilon_k = +1$ si le courant arrive au nœud, et $\epsilon_k = -1$ si le courant en part. Dans cette relation, on ne fait aucune hypothèse sur le signe de i_k ; les intensités sont algébriques.

1.2 Loi des mailles (seconde loi de Kirchhoff).

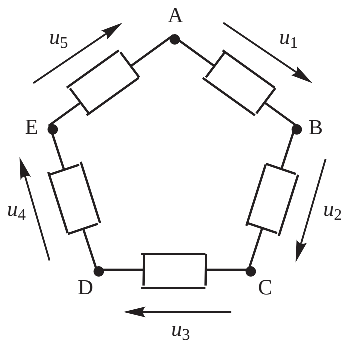
On rappelle qu'il y a **additivité des tensions**. Considérons deux branches AB et BC d'un circuit.



En écrivant les tensions en fonction des potentiels des points A, B et C, on a :

$$u_{\mathrm{AB}} + u_{\mathrm{BC}} = (V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}}) + (V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{C}}) = V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{C}} = u_{\mathrm{AC}} \qquad (2)$$

On appelle **maille** une succession de branches se refermant sur elle-même. La différence de potentiel entre les deux points extrêmes de la maille est alors nulle, puisqu'il s'agit du même point.



Sur le circuit ci-dessus, d'après l'additivité des tensions, on peut écrire :

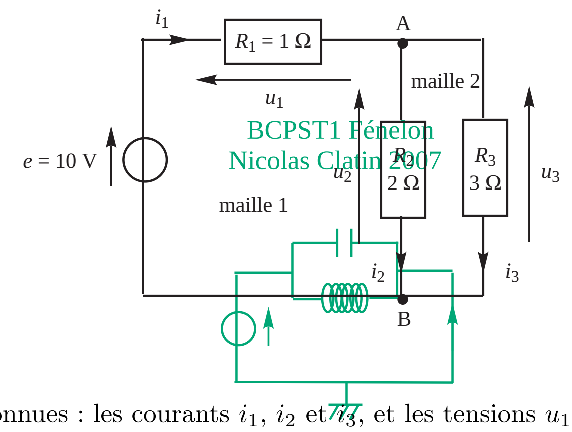
$$u_{\mathrm{AB}} + u_{\mathrm{BC}} + u_{\mathrm{CD}} + u_{\mathrm{DE}} + u_{\mathrm{EA}} = u_{\mathrm{AA}} = 0 \tag{3}$$

D'une façon générale, pour une maille comportant N branches, avec u_k la tension aux bornes de la branche k, si les tensions sont toutes **orientées dans le même sens**, on peut écrire la **loi des mailles** :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} u_k = 0} \tag{4}$$

Dans le cas où une des tensions, par exemple u_j n'est pas orientée dans le bon sens, il faut évidemment considérer la tension opposée $-u_j$.

Les deux lois de Kirchhoff sont suffisantes pour résoudre complètement un problème, c'est-à-dire déterminer le courant circulant dans chaque branche, et la tension aux bornes de chaque dipôle. Considérons le circuit ci-dessous :



Le problème compte 6 inconnues : les courants i_1, i_2 et i_3, et les tensions u_1, u_2 et u_3. Pour les déterminer, il faut trouver 6 relations indépendantes. La loi des nœuds appliquée en A conduit à :

$$i_1 = i_2 + i_3 \tag{5}$$

On peut remarquer qu'en B, la loi des nœuds conduit à la même relation. D'une façon générale, dans un circuit comportant N nœuds, on peut écrire $N-1$ relations entre les courants. La relation déduite du dernier nœud est en fait une combinaison des $N-1$ relations précédentes, et n'apporte pas d'information supplémentaire.

Par ailleurs, on peut écrire la loi des mailles dans les deux mailles du circuit. D'une façon générale, si un circuit comporte N mailles, on en déduit N relations entre les tensions. Pour la maille 1, on a :

$$u_1 - e + u_2 = 0 \tag{6}$$

D'autre part pour la maille 2, la relation est en fait évidente :

$$u_2 - u_3 = 0 \Rightarrow u_2 = u_3 \tag{7}$$

On dispose de 3 relations ; il en faut 3 autres. La tension aux bornes d'un dipôle est reliée au courant qui le traverse, par des lois vues au chapitre précédent. Dans le cas présent, les dipôles sont des résistors, et la loi d'Ohm s'applique. Tous les dipôles passifs sont en convention récepteur, donc :

$$u_1 = R_1\, i_1 \tag{8}$$
$$u_2 = R_2\, i_2 \tag{9}$$
$$u_3 = R_3\, i_3 \tag{10}$$

En injectant (8) et (9) dans (6) d'une part, et (9) et (10) dans (7) d'autre part, on peut exprimer les courants i_1 et i_3 en fonction de i_2 :

$$R_1\, i_1 - e + R_2\, i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{e - R_2\, i_2}{R_1} \tag{11}$$

$$R_2\, i_2 = R_3\, i_3 \Rightarrow i_3 = \frac{R_2\, i_2}{R_3} \tag{12}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer dans (5) :

$$\frac{e}{R_1} - \frac{R_2\, i_2}{R_1} = i_2 + \frac{R_2\, i_2}{R_3} \Rightarrow \frac{e}{R_1} = \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 + \frac{R_2}{R_3}\right) i_2$$

$$= \left(\frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_2 R_1}{R_1 R_3}\right) i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{R_3\, e}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 2,73\ \text{A} \tag{13}$$

D'après (12) :

$$i_3 = \frac{R_2\, e}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 1,82\ \text{A} \tag{14}$$

D'après (5) :

$$i_1 = \frac{(R_2 + R_3)\, e}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 4,55\ \text{A} \tag{15}$$

Les tensions se déduisent immédiatement à l'aide des équations (8), (9) et (7) :

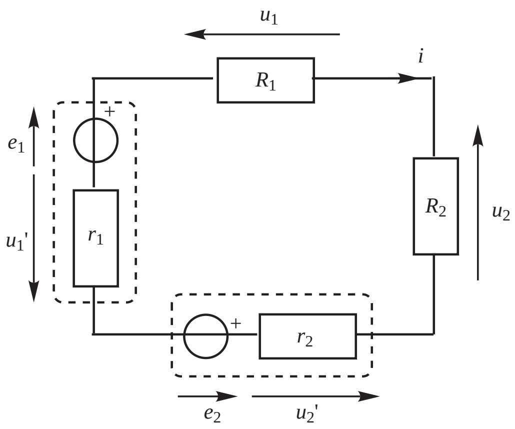
$$u_1 = R_1\, i_1 = 4,55\ \text{V} \qquad u_3 = u_2 = R_2\, i_2 = 5,46\ \text{V} \tag{16}$$

On pourrait se contenter des deux lois de Kirchhoff pour résoudre l'ensemble des problèmes d'électrocinétique. Cependant, on peut en tirer des lois corrollaires, dont l'utilisation est parfois très commode, et permet de gagner beaucoup de temps.

1.3 Loi de Pouillet.

La loi de Pouillet permet de calculer un courant dans le cas très particulier d'un circuit comportant une unique maille. Celle-ci est alors parcourue par un unique courant i, dont le sens dépend des polarités des générateurs présents dans le circuit. On l'oriente de façon arbitraire ; son signe précisera son sens réel.

Considérons le circuit ci-dessous, qui comporte deux générateurs orientés en sens inverse, comportant chacun une résistance interne. Définissons des tensions opposées aux sens du courant aux bornes de chaque résistor (convention récepteur).



Écrivons la loi des mailles dans l'unique maille :

$$u_1 - e_1 + u_1' + e_2 + u_2' + u_2 = 0 \Rightarrow R_1 i - e_1 + r_1 i + e_2 + r_2 i + R_2 i = 0 \Rightarrow i = \frac{e_1 - e_2}{(R_1 + R_2) + (r_1 + r_2)} \tag{17}$$

La généralisation est immédiate. Si le circuit comporte, dans son unique branche, N générateurs (e_k, r_k) et N' résistors R_k, la loi de Pouillet donne le courant circulant dans le circuit :

$$\boxed{i = \frac{\sum_{k=1}^{N} \epsilon_k e_k}{\sum_{k=1}^{N} r_k + \sum_{j=1}^{N'} R_j}} \tag{18}$$

où $\epsilon_k = +1$ si le courant sort par la borne $\oplus$ du générateur k, et $\epsilon_k = -1$ si le courant sort par la borne $\ominus$.

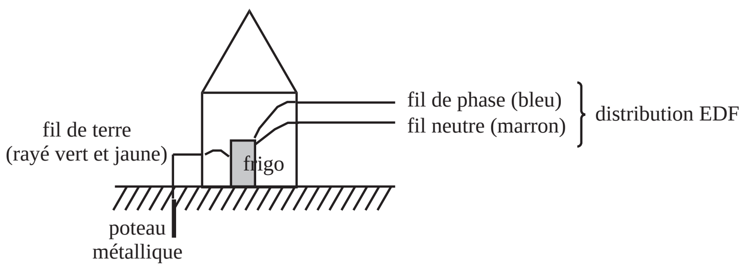
Que faire s'il y a un générateur de courant ? Il suffit de le transformer en un générateur de tension équivalent.

1.4 Théorème de Millman.

Le théorème de Millman permet de calculer le potentiel en un point A d'un circuit par rapport au potentiel en un autre point M, autrement dit la différence de potentiel entre deux points d'un circuit. En pratique, M est la plupart du temps la *masse électrique* du circuit.

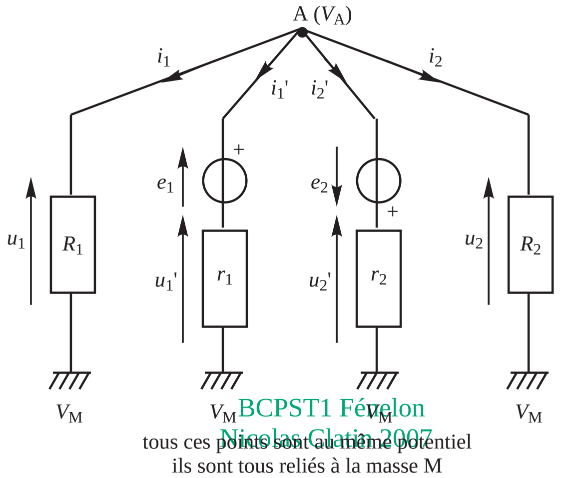
Dans un circuit, la *masse* est un élément conducteur, qui sert de référence des potentiels. Par exemple, dans une voiture, c'est la carrosserie qui joue ce rôle, et on parle de *masse carcasse*. Tous les potentiels électriques du circuit sont alors mesurés par rapport à celui de la masse, qu'on peut poser nul par commodité.

Pour des raisons de sécurité, la masse est très souvent reliée à la *terre*, c'est-à-dire au sol par un fil très conducteur. Le potentiel électrique de la masse est alors celui de la Terre (en fait celui du sol). Imaginons un appareil électroménager (réfrigérateur, chauffe-eau, four, plaques de cuisson, etc) mettant en jeu des courants électriques importants. Si un dysfonctionnement (court-circuit par exemple) entraine une électrisation de la carcasse de l'appareil, une personne touchant l'appareil serait électrocutée ; en effet, la différence de potentiel serait non nulle entre la main (qui touche la carcasse) et le pied (qui touche la Terre) de la personne. Si la carcasse est reliée à la terre, en revanche, il n'y a pas de différence de potentiel entre la main et le pied de la personne donc aucune circulation de courant.



Dans une installation électrique correcte, les appareils électroménagers, ainsi que les tuyauteries qui y sont raccordées (tuyau d'arrivée d'eau dans un chauffe-eau) doivent être reliés à la terre, selon des normes bien précises. Le fil de terre doit également être correctement relié au sol, par l'intermédiaire d'un gros poteau métallique en contact étroit avec le sol. La distribution d'électricité se fait par l'intermédiaire de deux fils, un *fil de phase* et un *fil neutre*, entre lesquels existe une différence de potentiel de 220 V en Europe. Le fil neutre est quasiment au potentiel de la terre, et ne présente normalement pas de danger.

On cherche la différence de potentiel entre un point A d'un circuit électrique, et un point M de potentiel connu (éventuellement arbitrairement fixé), qui constitue la masse du circuit.



Écrivons la tension entre A et la masse dans chaque branche, en fonction des courants qui circulent :

$$u_1 = V_A - V_M = R_1\, i_1 \qquad \Rightarrow i_1 = \frac{V_A - V_M}{R_1} \tag{19}$$

$$u_1' + e_1 = V_A - V_M = r_1\, i_1' + e_1 \qquad \Rightarrow i_1' = \frac{V_A - V_M}{r_1} - \frac{e_1}{r_1} \tag{20}$$

$$u_2' - e_2 = V_A - V_M = r_2\, i_2' - e_2 \qquad \Rightarrow i_2' = \frac{V_A - V_M}{r_2} + \frac{e_2}{r_2} \tag{21}$$

$$u_2 = V_A - V_M = R_2\, i_2 \qquad \Rightarrow i_2 = \frac{V_A - V_M}{R_2} \tag{22}$$

La loi des nœuds en A s'écrit alors :

$$i_1 + i_1' + i_2' + i_2 = 0 \Rightarrow (V_A - V_M)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{R_2}\right) + \left(\frac{e_2}{r_2} - \frac{e_1}{r_1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow V_A - V_M = \frac{\dfrac{e_1}{r_1} - \dfrac{e_2}{r_2}}{\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) + \left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right)} \tag{23}$$

La généralisation est immédiate. La différence de potentiel entre un point A et un point M reliés par N branches comportant un générateur et N' branches comportant une résistance, s'écrit :

$$\boxed{V_A - V_M = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{\epsilon_k e_k}{r_k}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{r_k} + \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{R_j}}} \tag{24}$$

où $\epsilon_k = +1$ si le pôle $\oplus$ du générateur est du côté de A, et $\epsilon_k = -1$ si le pôle $\ominus$ du générateur est du côté de A.

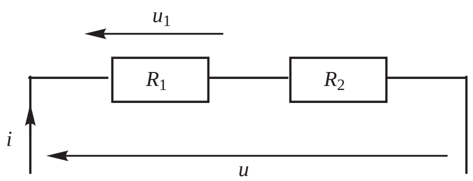
Dans le cas où une branche comporte un générateur en série avec une résistance, il suffit de considérer la résistance totale (voir les lois d'association de résistances au paragraphe 2).

Dans beaucoup de cas, il est commode de poser $V_{\mathrm{M}} = 0$ V, les potentiels étant repérés par rapport à une référence arbitraire.

1.5 Diviseur de tension et diviseur de courant.

1.5.1 Diviseur de tension.

Considérons un ensemble de deux résistors en série R_1 et R_2, parcouru par le **même courant** i. Soit u la tension aux bornes de l'ensemble.

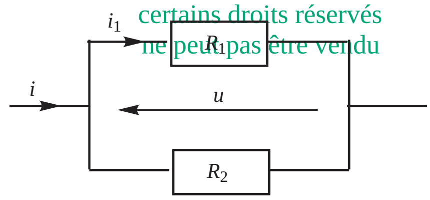


La tension u_1 aux bornes de R_1 est une fraction de la tension totale u :

$$\begin{cases} u_1 = R_1\, i \\ u = u_1 + u_2 = R_1\, i + R_2\, i \end{cases} \Rightarrow \quad \boxed{\frac{u_1}{u} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \tag{25}$$

1.5.2 Diviseur de courant.

On considère maintenant deux résistors en parallèle R_1 et R_2, soumis à la **même tension** u. Soit i le courant arrivant sur l'ensemble des deux résistors.



Le courant i_1 qui traverse R_1 est une fraction du courant total i :

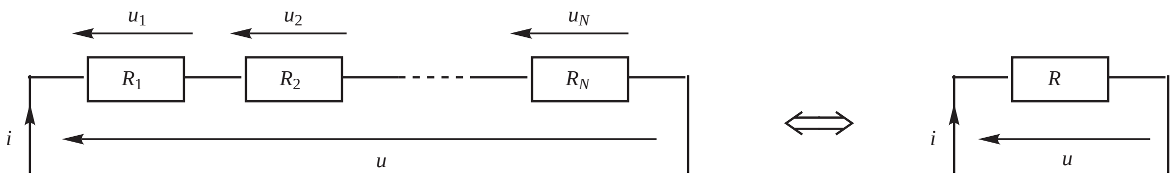
$$\begin{cases} u = R_1\, i_1 \\ u = R_2\,(i - i_1) \end{cases} \Rightarrow R_1\, i_1 = R_2\,(i - i_1) \Rightarrow (R_1 + R_2)\, i_1 = R_2\, i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{i_1}{i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}} \tag{26}$$

Attention ! la ressemblance entre les deux formules est trompeuse !

2 Association de résistances.

2.1 Association en série.

Considérons un ensemble de N résistances R_1, R_2,... R_N associées en série, c'est-à-dire parcourues par un même courant, et soit u_k la tension aux bornes de la résistance R_k.



La tension totale aux bornes de l'ensemble est la somme des tensions aux bornes de chaque résistance, soit :

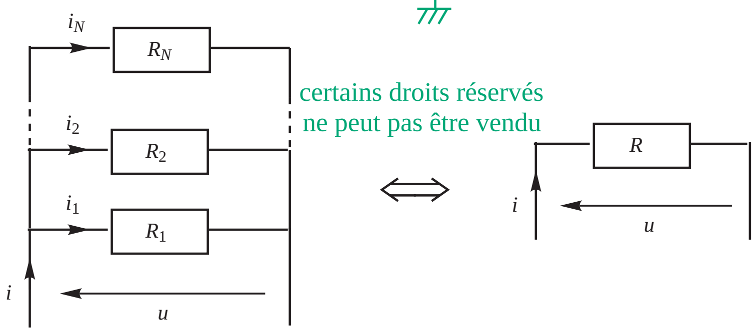
$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_N = R_1 i + R_2 i + \ldots + R_N i = (R_1 + R_2 + \ldots + R_N)\, i \tag{27}$$

Cette formule est analogue à la loi d'Ohm. Tout se passe donc comme si l'ensemble des N résistances **en série** était une résistance R unique, avec :

$$\boxed{R = \sum_{k=1}^{N} R_k} \tag{28}$$

2.2 Association en parallèle.

Considérons un ensemble de N résistances R_1, R_2,... R_N associées en parallèle, c'est-à-dire soumises à la même tension, et soit i_k le courant à travers la résistance R_k.



Le courant qui traverse l'ensemble est la somme des courants circulant à travers chaque résistance, soit :

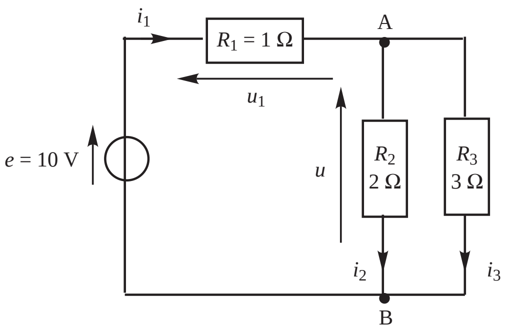
$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_N = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} + \ldots + \frac{u}{R_N} = u\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_N}\right) \tag{29}$$

Cette formule est analogue à la loi d'Ohm. Tout se passe donc comme si l'ensemble des N résistances **en parallèle** était une résistance R unique, avec :

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}} \tag{30}$$

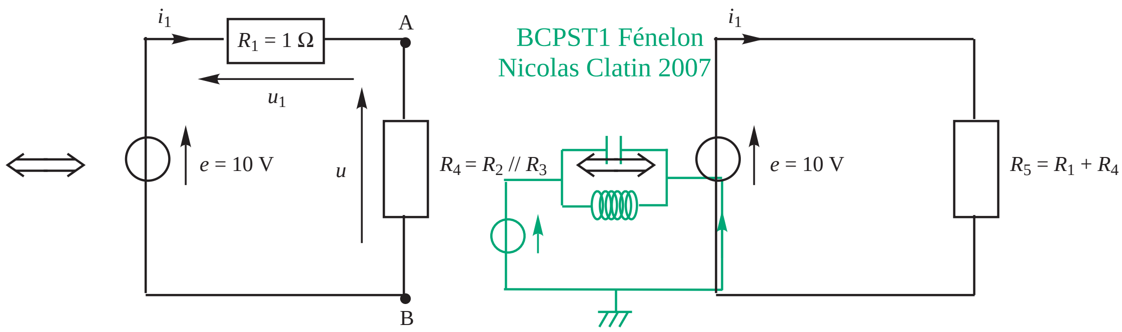
2.3 Exemple d'application.

Application : reprenons le circuit du paragraphe 1. La résolution de l'exercice peut se faire très rapidement en utilisant les associations de résistances.



Les résistances R_2 et R_3 sont en parallèle, donc équivalentes à une unique résistance R_4 telle que :

$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 1,2\ \Omega \tag{31}$$



Dans le circuit équivalent, les résistances R_1 et R_4 sont en série, donc équivalentes à une résistance unique R_5 telle que :

$$R_5 = R_1 + R_4 = 2,2\ \Omega \tag{32}$$

On a finalement remplacé le circuit de départ par un circuit équivalent ne comportant qu'une seule résistance R_5 aux bornes de laquelle on applique la tension e, et traversée par le courant i_1. La loi d'Ohm fournit immédiatement :

$$i_1 = \frac{e}{R_5} = 4,55 \text{ A} \tag{33}$$

En utilisant la loi d'Ohm, on en déduit immédiatement :

$$u_1 = R_1\, i_1 = 4,55 \text{ V} \qquad \text{et} \qquad u = e - u_1 = 5,45 \text{ V} \tag{34}$$

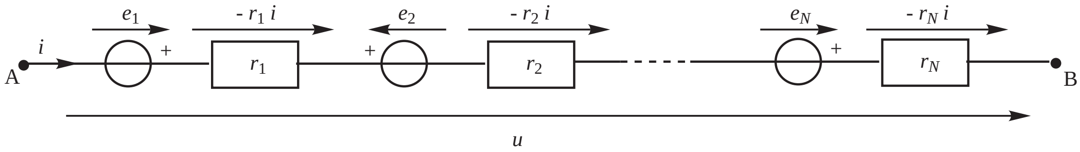
En reprenant le circuit de départ, les courants i_2 et i_3 s'obtiennent en utilisant la formule du diviseur de courant. En effet, les deux résistances R_2 et R_3 sont soumises à la même tension u. On calcule alors :

$$i_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} i_1 = 2,73 \text{ A} \qquad \text{et} \qquad i_3 = i_1 - i_2 = 1,82 \text{ A} \tag{35}$$

3 Association de dipôles actifs.

3.1 Association en série.

Il faut choisir le formalisme de Thévenin, c'est-à-dire considérer tous les générateurs comme des générateurs de tension. Soit i le courant circulant dans l'ensemble, et u la tension aux bornes de l'ensemble ; on se place en convention générateur.



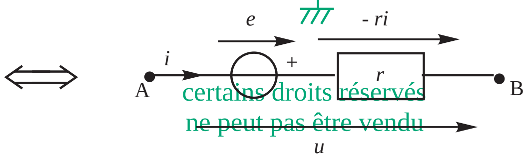
La tension totale u est la somme des tensions aux bornes de chaque générateur :

$$\begin{aligned} u &= (e_1 - r_1 i) + (-e_2 - r_2 i) + \ldots + (e_N - r_N i) \\ &= (e_1 - e_2 + \ldots + e_N) - (r_1 + r_2 + \ldots + r_N)\, i = e - ri \end{aligned} \tag{36}$$

Tout se passe donc comme si on était en présence d'un générateur de tension unique, dont la force électromotrice équivalente et la résistance interne équivalente sont les suivantes :

$$\boxed{e = \sum_{k=1}^{N} \epsilon_k e_k} \quad \text{et} \quad \boxed{r = \sum_{k=1}^{N} r_k} \tag{37}$$

avec $\epsilon_k = +1$ si le courant sort par la borne $\oplus$ du générateur (c'est-à-dire si celui-ci est en convention générateur), et $\epsilon_k = -1$ si le courant sort par la borne $\ominus$ du générateur (c'est-à-dire si celui-ci est en convention récepteur).

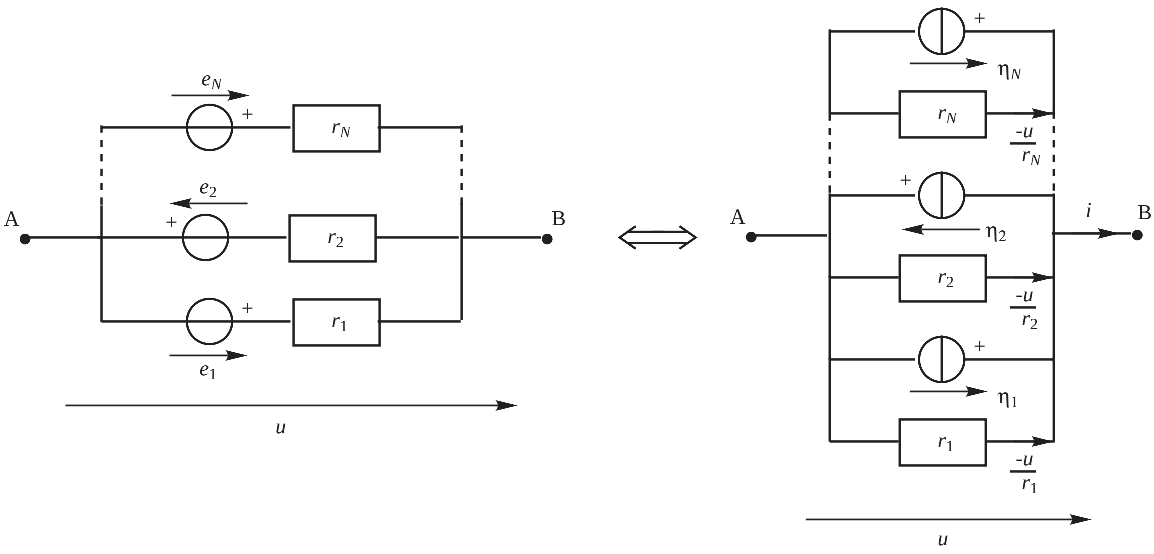


3.2 Association en parallèle.

Dans le cas d'une association de N générateurs en parallèle, il faut raisonner avec le formalisme de Norton, donc transformer tous les générateurs de tension en générateurs de courant.

Soit u la tension aux bornes de l'ensemble. Le courant total i qui circule à travers le circuit est la somme des courants dans toutes les branches :

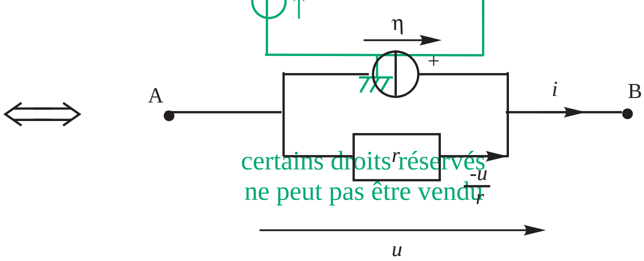
$$\begin{aligned} i &= \left(\eta_1 - \frac{u}{r_1}\right) + \left(-\eta_2 - \frac{u}{r_2}\right) + \ldots + \left(\eta_N - \frac{u}{r_N}\right) \\ &= (\eta_1 - \eta_2 + \ldots + \eta_N) - u\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_N}\right) = \eta - \frac{u}{r} \end{aligned} \tag{38}$$



Tout se passe donc comme si on était en présence d'un générateur de courant unique, dont le courant électromoteur équivalent et la résistance interne équivalente sont les suivantes :

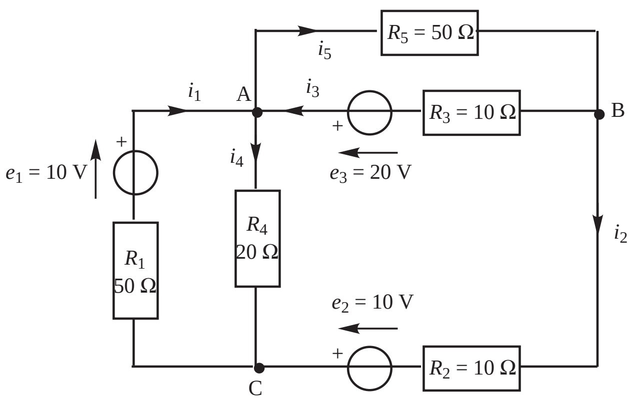
$$\boxed{\eta = \sum_{k=1}^{N} \epsilon_k \eta_k} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{1}{r} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{r_k}} \tag{39}$$

avec $\epsilon_k = +1$ si η_k est dans le même sens que i (c'est-à-dire si le générateur est en convention générateur), et $\epsilon_k = -1$ si η_k est dans le sens opposé à i (c'est-à-dire si le générateur est en convention récepteur).



3.3 Exemple d'application.

On considère le circuit ci-dessous. On cherche les courants circulant dans chacune des branches, et les tensions aux bornes de chaque dipôle.



3.3.1 Première méthode : lois de Kirchhoff.

On peut résoudre le problème en écrivant les lois de Kirchhoff. Il faut d'abord déterminer le nombre d'inconnues. Il y a 5 courants i_1, i_2, i_3, i_4 et i_5, et trois tensions u_{AB}, u_{AC} et u_{BC}. La relation courant-tension aux bornes d'un dipôle étant connue, les tensions se déduisent des courants de façon immédiate ; par exemple, il est clair que :

$$u_{\mathrm{AC}} = R_4\, i_4 \tag{40}$$
$$u_{\mathrm{AB}} = R_5\, i_5 \tag{41}$$

Par ailleurs, la loi des mailles donne immédiatement :

$$u_{\mathrm{BC}} = u_{\mathrm{AC}} - u_{\mathrm{AB}} \tag{42}$$

En définitive, il suffit de déterminer les 5 courants pour que le problème soit entièrement résolu. Il faut donc écrire 5 relations indépendantes. On peut écrire la loi des nœuds en A et en B :

$$i_1 + i_3 = i_4 + i_5 \tag{43}$$
$$i_5 = i_2 + i_3 \tag{44}$$

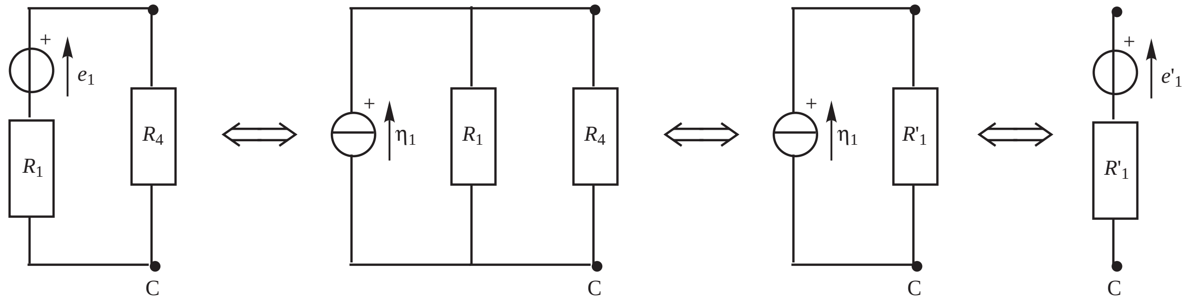
La loi des nœuds en C n'apporte rien de plus, puisque l'équation obtenue est en fait la différence membre à membre des deux précédentes. On peut en outre écrire la loi des mailles dans les mailles 1, 2 et 3 :

$$u_{\mathrm{AC}} = e_1 - R_1\, i_1 = R_4\, i_4 \tag{45}$$
$$u_{\mathrm{AB}} = e_3 - R_3\, i_3 = R_5\, i_5 \tag{46}$$
$$u_{\mathrm{AB}} + u_{\mathrm{BC}} + u_{\mathrm{CA}} = (e_3 - R_3\, i_3) + (-e_2 + R_2\, i_2) + (-R_4\, i_4) = 0 \tag{47}$$

On a bien 5 équations à 5 inconnues, ce qui permet de déterminer les 5 courants. La résolution est possible, mais fastidieuse.

3.3.2 Utilisation des lois d'association de dipôles.

On peut réduire le circuit à une unique maille. En effet, la branche AC comporte un générateur de tension en parallèle avec une résistance ; il en est de même pour la branche AB. Dans les deux cas, puisque les dipôles sont en parallèle, il faut utiliser le formalisme de Norton pour les générateurs. Pour la branche AC, on peut écrire les circuits équivalents suivants :



Le générateur de Norton équivalent a la même résistance interne R_1, et un courant électromoteur :

$$\eta_1 = \frac{e_1}{R_1} = \frac{1}{5}\,\mathrm{A} \tag{48}$$

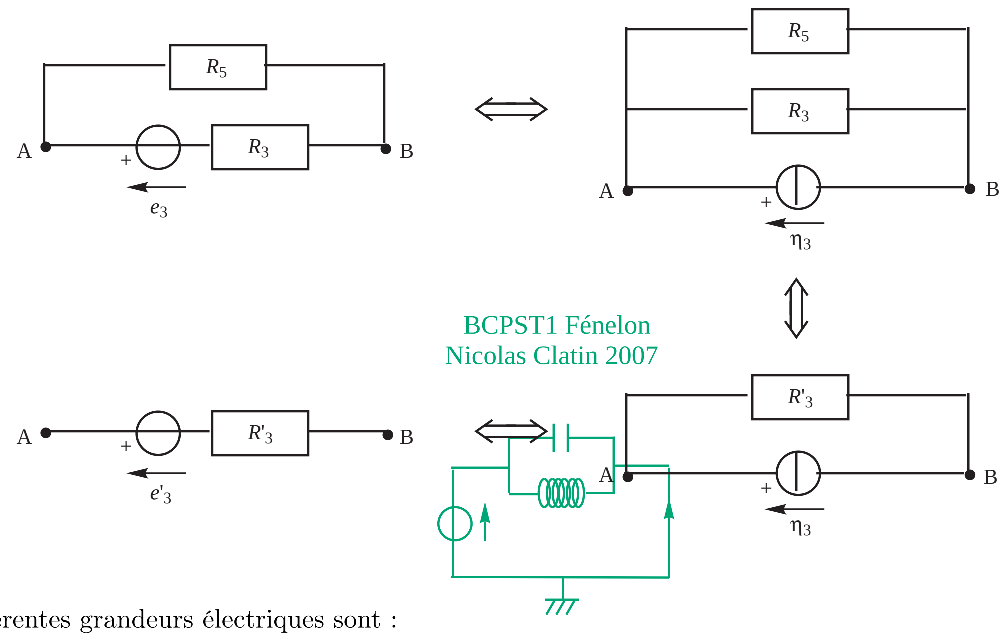
Les deux résistances R_1 et R_4 sont en parallèle, et sont équivalentes à une résistance unique :

$$\frac{1}{R'_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} = \frac{7}{100} \Rightarrow R'_1 = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} = \frac{100}{7}\ \Omega \tag{49}$$

Enfin, le générateur de Norton (η_1, R'_1) est équivalent à un générateur de Thévenin de même résistance interne R'_1 et de force électromotrice :

$$e'_1 = R'_1 \eta_1 = \frac{20}{7}\ \mathrm{V} \tag{50}$$

Procédons de même avec la branche AB. On peut écrire des circuits équivalents analogue au cas précédent :



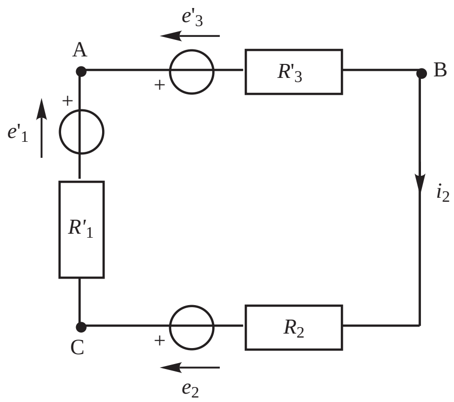
Les différentes grandeurs électriques sont :

$$\eta_3 = \frac{e_3}{R_3} = 2\ \mathrm{A} \tag{51}$$

$$R'_3 = R_3 // R_5 = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_5} = \frac{25}{3}\ \Omega \tag{52}$$

$$e'_3 = R'_3 \eta_3 = \frac{50}{3}\ \mathrm{V} \tag{53}$$

Le circuit équivalent comporte donc une unique maille parcourue par le courant i_2, celui de la branche BC qui n'a pas été modifiée lors des transformations du circuit.



La loi de Pouillet s'écrit :

$$e'_3 + R'_3 i_2 - e'_1 + R'_1 i_2 - e_2 + R_2 i_2 = 0 \Rightarrow i_2 = \frac{e'_1 + e_2 - e'_3}{R'_1 + R_2 + R'_3} = -\frac{16}{137} = -0,12 \text{ A} \tag{54}$$

On en déduit les trois tensions :

$$u_{\mathrm{AC}} = e'_1 - R'_1 i_2 = 4,5 \text{ V} \tag{55}$$
$$u_{\mathrm{AB}} = e'_3 + R'_3 i_2 = 15,7 \text{ V} \tag{56}$$
$$u_{\mathrm{BC}} = -e_2 + R_2 i_2 = -11,2 \text{ V} \tag{57}$$
$$\tag{58}$$

On peut vérifier que $u_{\mathrm{AB}} + u_{\mathrm{BC}} = u_{\mathrm{AC}}$, ce qui suggère qu'il n'y a pas une grossière erreur de signe ou de calcul.

En reprenant le circuit initial, on trouve immédiatement :

$$i_5 = \frac{u_{\mathrm{AB}}}{R_5} = 0,31 \text{ A} \tag{59}$$
$$i_4 = \frac{u_{\mathrm{AC}}}{R_4} = 0,23 \text{ A} \tag{60}$$

Enfin, en utilisant les relations aux nœuds B et A, on obtient les deux derniers courants :

$$i_3 = i_5 - i_2 = 0,43 \text{ A} \tag{61}$$
$$i_1 = i_4 + i_5 - i_3 = 0,11 \text{ A} \tag{62}$$

On peut vérifier que $u_{\mathrm{AC}} = e_1 - R_1\, i_1$ et $u_{\mathrm{AB}} = e_3 - R_3\, i_3$. C'est bien le cas.