chapitre 3

Régimes transitoires

En régime continu, les composantes capacitives et inductives d'un circuit sont analogues respectivement à un circuit ouvert et à un court-circuit. Elles n'ont donc aucun intérêt. Cependant, si un paramètre du circuit change, en particulier s'il y a une modification de la tension ou du courant délivré par une source, il existe un laps de temps relativement court pendant lequel les courants et les tensions dans le circuit évoluent jusqu'à une nouvelle valeur ; c'est le *régime transitoire*. Durant le régime transitoire, les capacités et les inductances emmagasinent ou restituent de l'énergie ; elles ont alors un comportement qui présente un intérêt pour la construction de dispositifs électroniques, destinés par exemple à la réalisation d'opérations mathématiques.

On étudie donc dans ce chapitre l'évolution des paramètres électriques d'un circuit, suite à la modification d'un signal électrique à l'entrée, jusqu'à un nouveau régime permanent. On se limite aux **circuits du premier ordre**, c'est-à-dire régis par une équation différentielle du premier ordre.

Plan du chapitre.

1. Circuit RC
   1.1 Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension
   1.2 Décharge du condensateur : régime libre
2. Circuit RL
   2.1 Réponse d'un circuit RL à un échelon de tension
   2.2 Régime libre

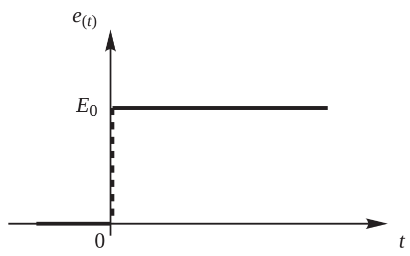
1 Circuit RC

1.1 Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension.

1.1.1 Échelon de tension.

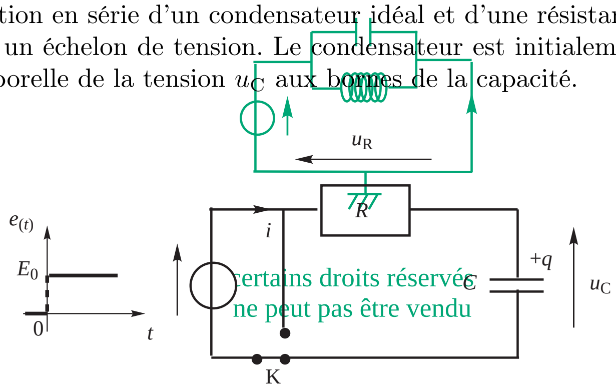
On appelle **échelon de tension** une tension $e_{(t)}$ qui, à un instant donné qu'on prend souvent égal à l'origine des temps $t = 0$, passe d'une valeur 0 à une valeur $E_0 \neq 0$. Il s'agit donc d'une fonction de la forme :

$$e_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E_0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$



1.1.2 Établissement de l'équation différentielle.

On considère une association en série d'un condensateur idéal et d'une résistance, alimentés par une source de tension idéale qui délivre un échelon de tension. Le condensateur est initialement déchargé : $q = 0$ à $t < 0$. On cherche la variation temporelle de la tension u_C aux bornes de la capacité.



À $t < 0$, le générateur délivre une tension nulle. En outre, la tension aux bornes du condensateur est nulle, puisque sa charge est nulle :

$$u_C = 0 \quad \text{à } t < 0 \tag{2}$$

On se place maintenant à $t \geq 0$. La tension délivrée par la source est $e_{(t)} = E_0$. La loi des mailles s'écrit :

$$e_{(t)} = E_0 = u_C + u_R = \frac{q}{C} + Ri \tag{3}$$

On peut en déduire une équation différentielle en q :

$$e_{(t)} = E_0 = \frac{q}{C} + R\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

Comme $q = C\,u_C$, on en déduit immédiatement l'équation différentielle vérifiée par u_C :

$$e_{(t)} = E_0 = u_\mathrm{C} + RC\,\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, de la variable u_C. On appelle **constante de temps** du circuit la grandeur :

$$\boxed{\tau = RC} \tag{6}$$

Cette grandeur est bien homogène à un temps. L'équation différentielle s'écrit finalement :

$$\boxed{\tau\,\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + u_\mathrm{C} = E_0} \tag{7}$$

1.1.3 Résolution de l'équation différentielle.

La solution complète de l'équation différentielle est la **somme** de deux termes :
- la solution de l'**équation homogène**, c'est-à-dire telle que le second membre soit nul,
- une **solution particulière**.

L'équation homogène s'écrit :

$$\tau\,\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + u_\mathrm{C} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{u_\mathrm{C}} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau} \tag{8}$$

Sa solution u_1 est de la forme :

$$u_1 = A\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{9}$$

où A est une constante. Il faut trouver une solution particulière u_2, quelle qu'elle soit. La plus simple est celle qui correspond au régime permanent, soit :

$$\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow u_2 = E_0 \tag{10}$$

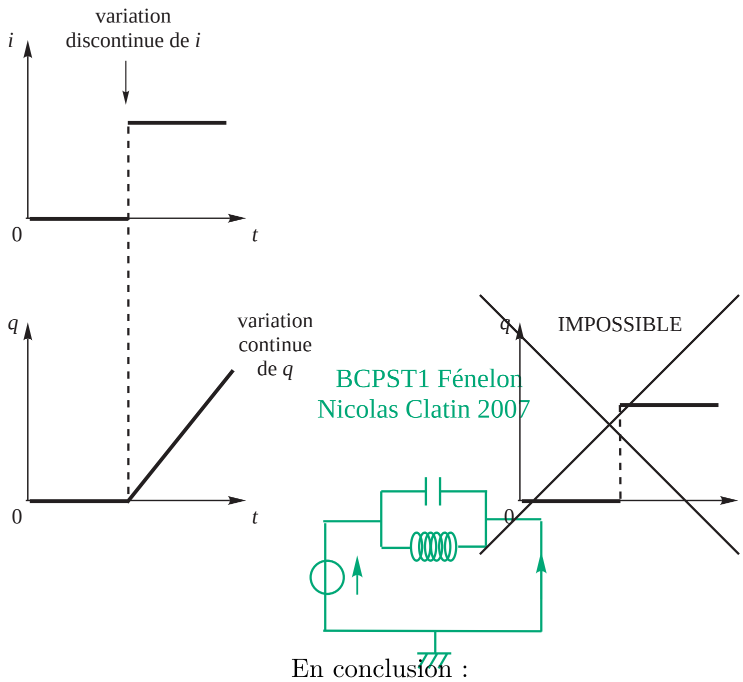
La solution complète est donc de la forme :

$$u_{\mathrm{C}\,(t)} = A\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E_0 \tag{11}$$

Il reste à déterminer la valeur de la constante d'intégration A. Pour cela, on utilise une condition à la limite. On sait qu'à $t < 0$, la tension aux bornes du condensateur est nulle d'après (2) ; que peut-on en déduire pour ce qui est de la tension à l'instant $t = 0$?

1.1.4 Continuité de la charge et de la tension.

D'un point de vue physique, la charge apparait aux armatures du condensateur de façon progressive, au fur et à mesure que les électrons arrivent. En conséquence, la charge ne varie pas brusquement au niveau des armatures, et cela même si on fait passer *instantanément* l'intensité i du courant d'une valeur nulle dans le circuit à une valeur non nulle, par exemple en fermant un interrupteur. On peut parvenir à la même conclusion en raisonnant sur l'énergie stockée par le condensateur. Si q passait instantanément d'une valeur nulle à une valeur non nulle, ceci signifierait que l'énergie stockée ($W_C = q^2/2C$) passerait d'une valeur nulle à une valeur non nulle en un temps nul, autrement dit dit que la puissance reçue à cet instant serait infinie, ce qui est impossible.



En conclusion :

toute discontinuité de la charge q d'un condensateur, donc de la tension u à ses bornes, est impossible.

1.1.5 Tension aux bornes du condensateur.

Il y a **continuité de la tension** aux bornes du condensateur, donc à l'instant $t = 0$ où l'échelon de tension se produit, celle-ci est encore égale à sa valeur à $t < 0$, soit $u_{\mathrm{C}\,(t=0)} = 0$. En reportant cette condition dans (11), on obtient :

$$0 = A + E_0 \Rightarrow A = -E_0 \tag{12}$$

Finalement, la tension aux bornes du condensateur varie au cours du temps selon la relation :

$$\boxed{u_{\mathrm{C}\,(t)} = E_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\tau = RC} \tag{13}$$

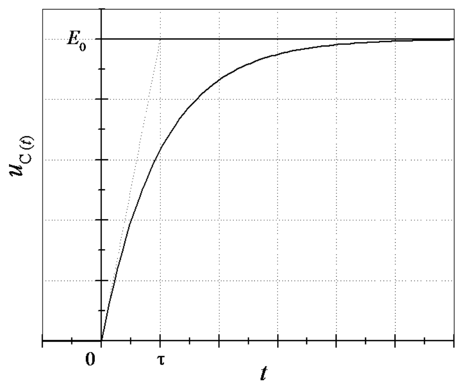
La charge évolue en fonction du temps selon une loi analogue :

$$q_{(t)} = C\, u_{\mathrm{C}\,(t)} = CE_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \tag{14}$$

La charge, initialement nulle, augmente jusqu'à une valeur non nulle. On réalise donc la **charge du condensateur**.

1.1.6 Régime transitoire et régime permanent.

L'allure de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps est la suivante :



Il y a continuité de la tension à l'instant initial. La tension et la charge tendent vers une valeur finale constante :

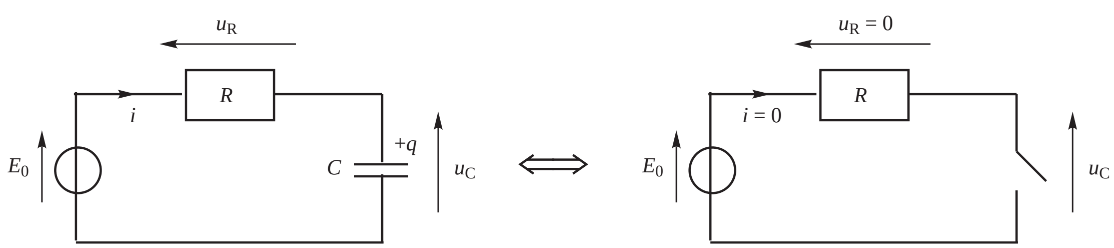
$$u_{C\,(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} E_0 \tag{15}$$

$$q_{(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} CE_0 \tag{16}$$

Le **régime transitoire**, pendant lequel la tension u_C varie, évolue donc vers un **régime permanent** ou **régime stationnaire** (indépendant du temps), pour lequel la tension u_C devient constante, avec une valeur imposée par la source de tension.

On peut remarquer que la valeur de u_C pour un temps infini correspond à la solution particulière u_2. Ceci est attendu, puisque la solution particulière a été cherchée constante, ce qui correspond précisément à une solution en régime permanent.

On peut retrouver la valeur de u_C en régime permanent d'une autre manière. Lorsqu'on arrive en régime permanent, le condensateur idéal se comporte comme un interrupteur ouvert ; le circuit se réduit alors à :

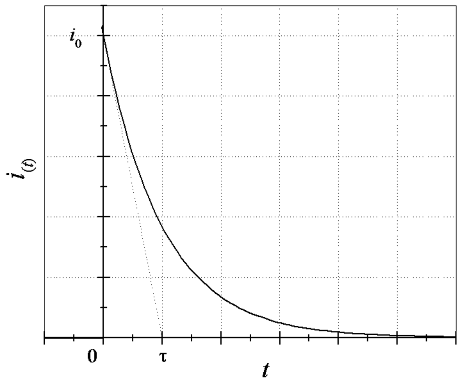


Le circuit étant ouvert, aucun courant ne circule ; la tension aux bornes de la résistance est donc nulle, et de manière évidente : $u_C = E_0$.

1.1.7 Intensité dans le circuit.

L'intensité qui circule se déduit directement de l'expression de la charge donnée par (14) :

$$i_{(t)} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{CE_0}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{i_{(t)} = \frac{E_0}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}} \tag{17}$$



On remarque d'une part que l'intensité à l'instant initial est :

$$i_0 = \frac{E_0}{R} \tag{18}$$

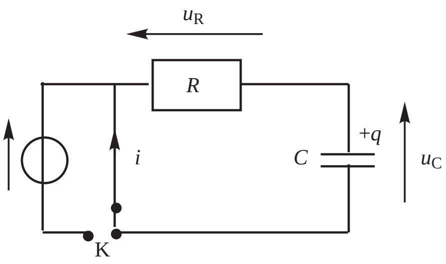
Il y a donc une **discontinuité** de l'intensité dans le circuit. À cet instant, la tension aux bornes du condensateur étant encore nulle, le courant est imposé par la résistance. D'autre part, lorsqu'on parvient au régime continu, le courant tend vers une valeur nulle :

$$i_{(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \tag{19}$$

1.2 Décharge du condensateur : régime libre.

1.2.1 Évolution de la tension.

Une fois le régime permanent atteint, donc lorsque $u_{C(t)} \approx E_0$, on bascule l'interrupteur. Le circuit se réduit alors au condensateur et à la résistance.



Par commodité, on choisit une **nouvelle origine des temps**, à l'instant où on bascule l'interrupteur. À cet instant, la charge du condensateur est donnée par (16) :

$$q_0 = CE_0 \tag{20}$$

Gardons le même sens pour le courant dans le circuit. La loi des mailles s'écrit :

$$u_C + u_R = 0 \Rightarrow u_C + Ri = 0 \Rightarrow u_C + RC\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{21}$$

Il s'agit encore d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, mais avec un second membre nul. On peut la résoudre directement en intégrant entre deux bornes. À la nouvelle origine des temps

$t = 0$, $u_{\mathrm{C}} = E_0$; à un instant quelconque t, la tension aux bornes du condensateur a une valeur quelconque. Après séparation des variables, on a donc :

$$\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{u_{\mathrm{C}}} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau} \Rightarrow \int_{E_0}^{u_{\mathrm{C}}} \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{u_{\mathrm{C}}} = -\int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{\tau} \Rightarrow \ln\frac{u_{\mathrm{C}}}{E_0} = -\frac{t}{\tau} \tag{22}$$

La tension décroit donc exponentiellement avec une constante de temps identique à celle de la charge :

$$\boxed{u_{\mathrm{C}\,(t)} = E_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\tau = RC} \tag{23}$$

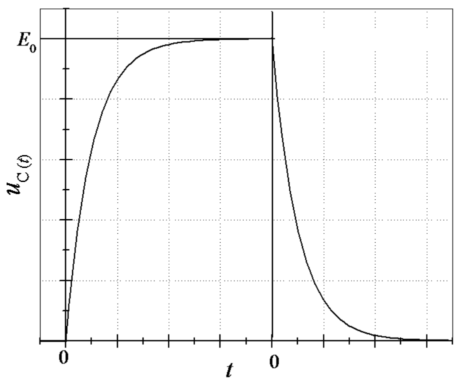
La charge est proportionnelle à la tension :

$$q_{(t)} = CE_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{24}$$

La tension aux bornes du condensateur, de même que la charge, varient durant le régime transitoire, et tendent toutes les deux, après un temps très long, vers un régime permanent pour lequel leur valeur est constante, en l'occurrence nulle. On est donc dans une phase de **décharge du condensateur** :

$$u_{\mathrm{C}\,(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \tag{25}$$

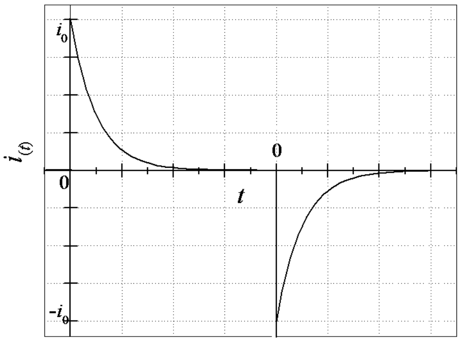
$$q_{(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \tag{26}$$



Le courant s'obtient par dérivation :

$$i_{(t)} = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{CE_0}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{i_{(t)} = -\frac{E_0}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}} \tag{27}$$

Il est maintenant négatif, ce qui signifie qu'il circule en sens inverse de celui choisi. Pendant la décharge, le courant circule en sens inverse à celui qu'il avait lors de la charge.



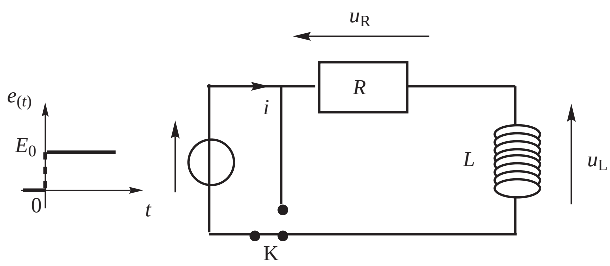
Le courant présente une discontinuité lors du passage du régime de charge au régime de décharge. Il tend à s'annuler après un temps très long :

$$i_{(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \tag{28}$$

2 Circuit RL

2.1 Réponse d'un circuit RL à un échelon de tension.

Le problème est identique à celui du circuit RC, en remplaçant le condensateur idéal par une bobine idéale d'inductance L.



2.1.1 Établissement de l'équation différentielle.

À l'instant $t = 0$, la tension délivrée par le générateur passe d'une valeur nulle à la valeur $e_{(t)} = E_0$. Pour $t < 0$, aucun courant ne circule dans le circuit. Pour $t \geq 0$, la loi des mailles s'écrit :

$$e_{(t)} = u_L + u_R = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri \tag{29}$$

En introduisant la **constante de temps** du circuit :

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}} \tag{30}$$

l'équation différentielle vérifiée par le courant est du premier ordre à coefficients constants :

$$\boxed{\tau\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = \frac{E_0}{R}} \tag{31}$$

2.1.2 Solution de l'équation différentielle.

La solution i_1 de l'équation homogène est :

$$\tau\,\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + i_1 = 0 \Rightarrow i_1 = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{32}$$

Une solution particulière i_2 correspond au courant en régime permanent :

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow i_2 = \frac{E_0}{R} \tag{33}$$

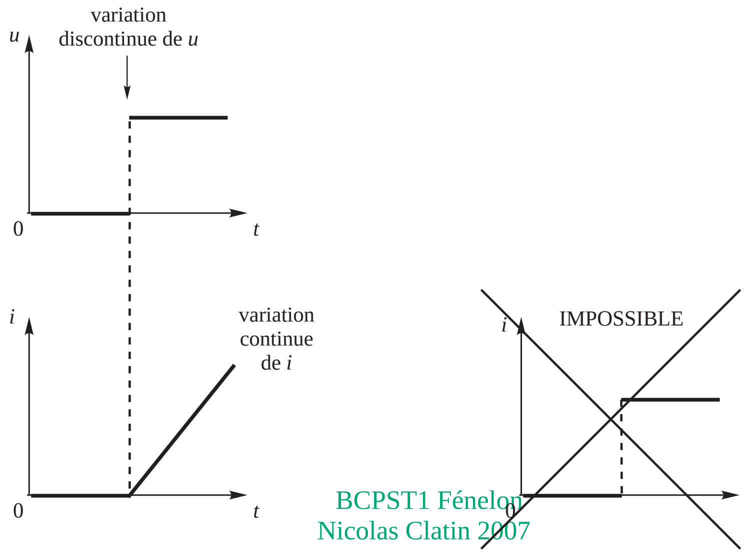
La solution complète de (31) est de la forme :

$$i_{(t)} = i_1 + i_2 = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E_0}{R} \tag{34}$$

La constante d'intégration A se détermine à l'aide d'une condition à la limite. On sait que le courant est nul pour $t < 0$. Que peut-on en déduire à l'instant $t = 0$?

2.1.3 Continuité de l'intensité.

Supposons qu'on soumette une bobine à une différence de potentiel, qu'on fait passer *instantanément* d'une valeur nulle à une valeur non nulle. Le courant qui traverse la bobine ne peut en revanche pas passer d'une valeur nulle à une valeur non nulle de façon instantanée. En effet, cela signifierait que l'énergie stockée ($W_L = Li^2/2$) passerait d'une valeur nulle à une valeur non nulle en un temps nul, donc que la puissance reçue à cet instant serait infinie. Ceci est évidemment impossible.



En conclusion :

> toute discontinuité de l'intensité i à travers une bobine est impossible.

Cette propriété des bobines est mise à profit dans la protection de certains circuits ou de certaines parties d'un circuit. Un composant sensible aux brusques variations de courant est protégé en plaçant en amont une bobine, qui régule la variation de courant dans le circuit qui la suit.

2.1.4 Intensité traversant la bobine.

Le courant traversant une bobine ne pouvant présenter de discontinuité, $i_{(t)}$ varie continûment, en particulier à $t = 0$. À cette date, il a donc la même valeur qu'à $t < 0$, soit $i_{(t=0)} = 0$. En introduisant cette condition dans (34), on a :

$$0 = A + \frac{E_0}{R} \tag{35}$$

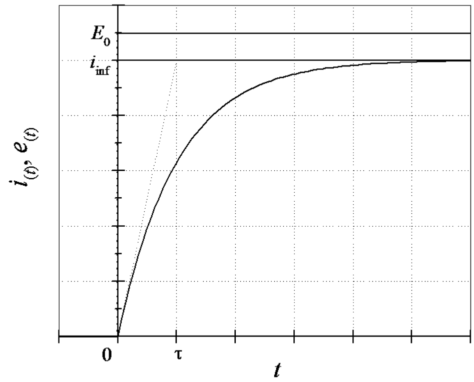
Finalement, le courant évolue selon la relation :

$$\boxed{i_{(t)} = \frac{E_0}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\tau = \frac{L}{R}} \tag{36}$$

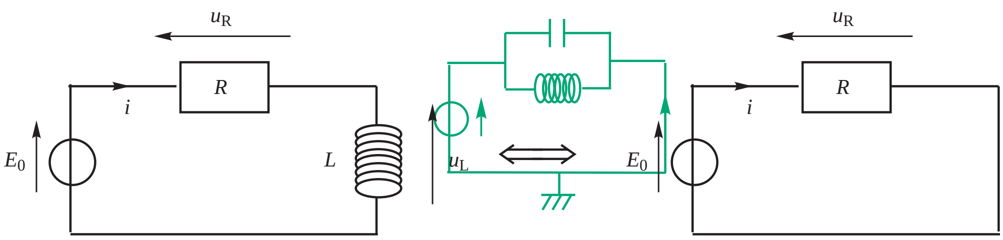
Lorsqu'on attend un temps très long, le courant tend vers une valeur constante, c'est-à-dire que le **régime transitoire** évolue vers un **régime permanent** :

$$i_{(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} i_\infty = \frac{E_0}{R} \tag{37}$$

On remarque que cette valeur correspond à la solution particulière i_2 de l'équation différentielle. Ceci est logique puisque cette valeur particulière a été cherchée constante, ce qui correspond bien à une solution en régime permanent.



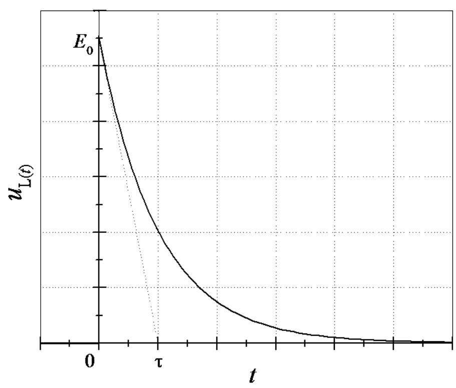
On peut retrouver la valeur de i_∞ en considérant le circuit équivalent en régime permanent. En effet, en régime permanent, la bobine se comporte comme un fil infiniment conducteur. Le circuit se réduit alors à une résistance alimentée par la tension E_0 ; par application triviale de la loi de Pouillet, le courant est $i_\infty = E_0/R$.



2.1.5 Évolution de la tension aux bornes de la bobine.

La tension aux bornes de la bobine est facilement obtenue à partir de l'intensité :

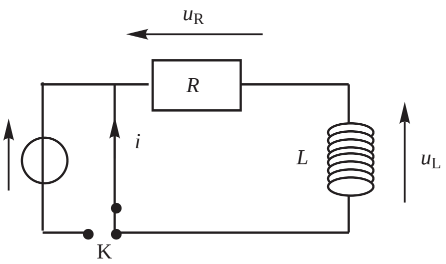
$$u_{\mathrm{L}\,(t)} = L\,\frac{\mathrm{d}i_{(t)}}{\mathrm{d}t} = \frac{E_0 L}{R}\,\tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{u_{\mathrm{L}\,(t)} = E_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}} \tag{38}$$



La tension aux bornes de la bobine présente une discontinuité à l'instant initial. En outre, elle tend vers une valeur nulle en régime permanent.

2.2 Régime libre.

Lorsqu'on est arrivé en régime permanent, on bascule l'interrupteur ; le circuit se réduit à la résistance en série avec la bobine. On choisit comme **nouvelle origine des temps** le moment où l'interrupteur est actionné.



Conservons le même sens pour le courant. L'équation différentielle peut être obtenue à partir de la loi des mailles comme précédemment. On peut également faire un raisonnement énergétique. Si i est le courant qui circule dans le circuit, la puissance reçue par la bobine est :

$$\mathcal{P}_L = u_L \times i = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \times i \tag{39}$$

De même, la puissance reçue par la résistance est :

$$\mathcal{P}_R = u_R \times i = Ri^2 \tag{40}$$

Attention aux signes ! On a montré que la puissance reçue par un dipôle est : $\mathcal{P} = u_{\mathrm{AB}} \times i_{\mathrm{AB}}$, soit $\mathcal{P} = ui$ en convention récepteur.

Par conservation de l'énergie, l'énergie totale reçue par le circuit est nulle, puisqu'il n'y a aucun générateur d'énergie, soit :

$$\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L = 0 \tag{41}$$

Cette conservation de l'énergie peut s'interpréter différemment. La puissance $\mathcal{P}_R$ reçue par la résistance est en fait fournie par la bobine, qui, au cours de sa décharge, restitue l'énergie emmagasinée lors de sa charge. Or, la puissance fournie par la bobine est l'opposée de la puissance reçue, soit $-\mathcal{P}_L$. On a donc : $\mathcal{P}_R = -\mathcal{P}_L$, ce qui est évidemment identique à (41).

Remplaçons les deux termes par leurs expressions et simplifions :

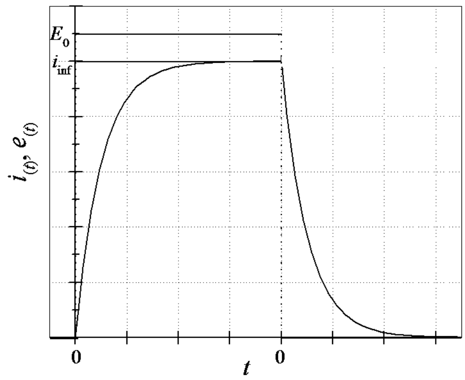
$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \times i + Ri^2 = 0 \Rightarrow L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0 \Rightarrow \tau\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = 0 \tag{42}$$

Après séparation des variables, intégrons entre l'instant initial (nouvelle origine des temps) pour laquelle $i_{(t)} = i_\infty$ du fait de la **continuité du courant** dans le circuit, et un instant quelconque pour lequel le courant vaut une valeur quelconque $i_{(t)}$:

$$\frac{\mathrm{d}i}{i} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau} \Rightarrow \int_{i_\infty}^{i_{(t)}} \frac{\mathrm{d}i}{i} = -\int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{\tau} \Rightarrow \ln\frac{i_{(t)}}{i_\infty} = -\frac{t}{\tau} \tag{43}$$

Le courant subit une décroissance exponentielle :

$$\boxed{i_{(t)} = i_\infty \, \mathrm{e}^{-t/\tau}} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\tau = \frac{L}{R}} \tag{44}$$



Le circuit évolue vers un nouveau régime permanent pour lequel le courant est nul, puisque :

$$i_{(t)} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \tag{45}$$

La tension, orientée dans le même sens que précédemment, est alors :

$$u_{\mathrm{L}\,(t)} = L \, \frac{\mathrm{d}i_{(t)}}{\mathrm{d}t} = -\frac{L i_\infty}{\tau} \, \mathrm{e}^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{u_{\mathrm{L}\,(t)} = -E_0 \, \mathrm{e}^{-t/\tau}} \tag{46}$$

On observe une discontinuité de u_{L} lorsque l'interrupteur est bascule. Elle change de sens, et tend vers 0 en régime permanent.