ÉLECTROCINÉTIQUE

chapitre 4

Circuits oscillants

Dans ce très court chapitre, on présente les oscillations libres d'un circuit LC ne comportant que des composants idéaux. L'équation différentielle régissant ce circuit est l'équation de l'*oscillateur harmonique à une dimension*. Elle intervient également dans les systèmes mécaniques oscillants, ce qui permet de faire une analogie entre grandeurs mécaniques et grandeurs électriques. Une telle analogie, entre deux domaines différents de la physique, est souvent fructueuse, d'une part parce que cela simplifie le traitement mathématique, d'autre part parce que cela permet parfois des interprétations physiques concrètes de phénomènes abstraits.

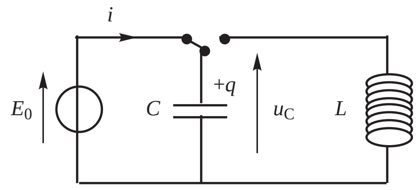
En seconde année, ces problèmes d'oscillateurs, tant mécaniques qu'électriques, seront complétés avec l'étude des phénomènes d'amortissement dus aux dissipations d'énergie (frottements en mécanique ou effet Joule en électrocinétique).

Plan du chapitre.

1 Oscillations libres d'un circuit LC.

1.1 Établissement de l'équation différentielle.

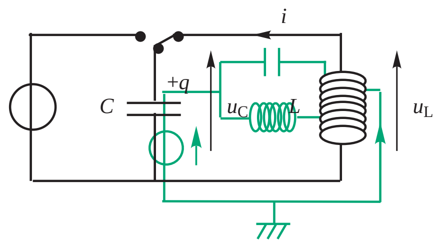
On considère le circuit ci-dessous. Dans un premier temps, l'interrupteur relie la branche comportant la source de tension constante E_0 au condensateur, supposé idéal, de capacité C.



Durant le régime transitoire, le condensateur se charge, jusqu'à atteindre un régime permanent, tel que :

$$u_{C\,\infty} = E_0 \Rightarrow q_\infty = CE_0 \tag{1}$$

Une fois le régime permanent atteint, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Il ne circule plus de courant dans le circuit. On bascule alors l'interrupteur, de sorte que le condensateur soit branché aux bornes d'une bobine, supposée idéale, d'inductance L. Aucun signal électrique n'est imposé au circuit ; il évolue alors en **régime libre** qui ne dépend que des caractéristiques intrinsèques des composants du circuit. Établissons l'équation différentielle qui régit les grandeurs électriques du circuit.



Choisissons un sens pour le courant. Les tensions u_C et u_L aux bornes des deux dipôles sont égales ; notons-la u. Avec les notations choisies, le condensateur est en convention récepteur, et la bobine en convention générateur.

$$u_C = u_L \Rightarrow \frac{q}{C} = -L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{q}{C} = -L\,\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} \tag{2}$$

où la notation $\mathrm{d}^2q/\mathrm{d}t^2$ signifie « dérivée seconde de la fonction q par rapport à la variable t ». La charge du condensateur vérifie donc une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}\,q = 0 \tag{3}$$

La tension $u = u_C$ étant proportionnelle à la charge du condensateur, on a immédiatement :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}\,u = 0 \tag{4}$$

L'équation différentielle vérifiée par l'intensité s'obtient en dérivant (3) par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}^3q}{\mathrm{d}t^3} + \frac{1}{LC} \times \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}\,i = 0 \tag{5}$$

En définitive, toutes les grandeurs électriques du circuit obéissent à la même **équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants** (où f est q, u ou i) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 f = 0} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \tag{6}$$

Un système physique quelconque régi par une équation différentielle de cette forme est appelé un **oscillateur harmonique à une dimension**. La grandeur ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur, homogène à l'inverse d'un temps.

Le terme *pulsation propre* s'oppose à la *pulsation forcée*. La pulsation propre du circuit intervient lorsqu'on laisse le circuit évoluer spontanément, sans imposer aucune grandeur électrique ; c'est le régime libre. Comme on le verra par la suite, on peut aussi imposer la pulsation d'un circuit ; on parle alors de régime forcé.

Attention ! Dans l'équation différentielle d'un oscillateur, les signes sont importants. Ainsi, l'équation différentielle suivante n'est pas celle d'un oscillateur harmonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} - \omega_0^2 f = 0$$

1.2 Résolution de l'équation différentielle.

L'équation différentielle (6) a une solution sinusoïdale, qu'on peut écrire de deux façons différentes :

$$f_{(t)} = A\,\cos\omega_0 t + B\,\sin\omega_0 t \tag{7}$$

$$f_{(t)} = K\,\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) \tag{8}$$

Les paramètres A et B, ou K et φ sont des constantes d'intégration. Les deux formes sont équivalentes, comme une petite manipulation trigonométrique le montre facilement. On les détermine à l'aide de deux conditions initiales. En outre, on choisit le basculement de l'interrupteur comme nouvelle origine des temps.

La charge $q_{(t)}$, vérifiant (3), est donc de la forme :

$$q_{(t)} = A\,\cos\omega_0 t + B\,\sin\omega_0 t \tag{9}$$

À l'instant initial (basculement de l'interrupteur), comme il y a continuité de la tension aux bornes du condensateur, donc continuité de sa charge, celle-ci est égale à la valeur atteinte en régime permanent donnée par (1) :

$$q_{(t=0)} = CE_0 \Rightarrow A = CE_0 \Rightarrow q_{(t)} = CE_0\,\cos\omega_0 t + B\,\sin\omega_0 t \tag{10}$$

Pour déterminer B, il faut une seconde condition à la limite. L'intensité dans le circuit est :

$$i_{(t)} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -CE_0\omega_0\,\sin\omega_0 t + B\omega_0\,\cos\omega_0 t \tag{11}$$

Or, il y a continuité de l'intensité traversant la bobine ; comme elle est nulle avant le basculement de l'interrupteur, on peut écrire à l'instant initial :

$$i_{(t=0)} = 0 \Rightarrow B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0 \tag{12}$$

En définitive, on a donc :

$$q_{(t)} = CE_0\,\cos\omega_0 t \tag{13}$$

$$i_{(t)} = -CE_0\omega_0\,\sin\omega_0 t \tag{14}$$

La tension aux bornes du condensateur et de la bobine est alors :

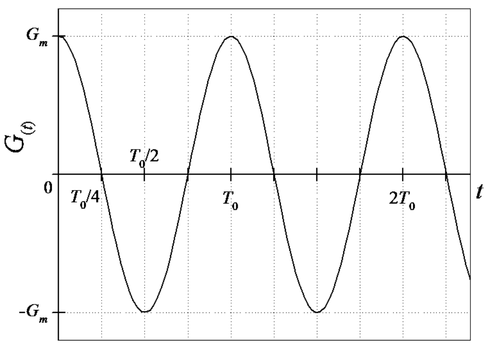
$$u_{(t)} = \frac{q}{C} = E_0 \cos \omega_0 t \tag{15}$$

Les grandeurs électriques du circuit varient donc sinusoïdalement. Une grandeur G (q, u ou i) varie sinusoïdalement au cours du temps si elle est de la forme (en remplaçant éventuellement le cosinus par un sinus) :

$$G_{(t)} = G_m \cos \omega_0 t \tag{16}$$

Elle est caractérisée par deux paramètres :
- son **amplitude** G_m, qui est la demi-différence entre les valeurs extrémales prises par la fonction,
- sa **pulsation** ω_0, reliée à sa **période** temporelle T_0, temps au bout duquel le signal se répète identique à lui-même, ou à sa **fréquence** ν_0 qui est l'inverse de la période :

$$\boxed{\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}} \tag{17}$$



Dans la formule de G, le terme $\omega_0 t$ s'interprète comme un angle, puisqu'on en calcule de cosinus. L'**unité de la pulsation** est donc le $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. C'est bien une grandeur homogène à l'inverse d'un temps, puisque les radians sont homogènes à une grandeur sans dimension (rapport de deux longueurs).

Un système physique dont une grandeur varie sinusoïdalement est qualifié d'**oscillateur** ; si aucun autre terme n'apparait, c'est un **oscillateur harmonique**. Le circuit LC est qualifié de **circuit oscillant**. La période T_0 de ses oscillations est reliée à sa pulsation propre :

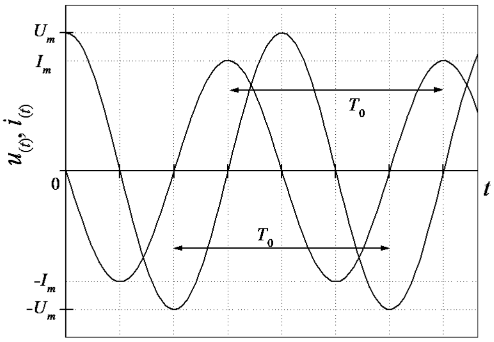
$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}} \tag{18}$$

En seconde année sont au programme les circuits oscillants amortis, dont l'amplitude diminue au cours du temps. Il est également possible de réaliser des circuits oscillants dont l'amplitude augmente au cours du temps, mais cela nécessite évidemment un apport d'énergie.

2 Déphasage entre tension et intensité.

2.1 Mise en évidence et calcul du déphasage.

Représentons simultanément la tension et l'intensité dans le circuit lors des oscillations libres.



La tension u et le courant i sont des fonctions sinsoïdales de même période, mais elles ne parviennent pas à leur valeurs extrémales (maximum ou minimum) aux mêmes dates. On dit que la tension et le courant sont **déphasés**. Exprimons les deux grandeurs sous la forme d'un cosinus, à l'aide de (15) et (14) :

$$\begin{cases} u_{(t)} = E_0 \cos \omega_0 t \\ i_{(t)} = CE_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \pi/2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{(t)} = U_m \cos \omega_0 t \\ i_{(t)} = I_m \cos(\omega_0 t - \varphi) \end{cases} \tag{19}$$

Le terme φ est appelé le **déphasage** entre le courant et la tension. Dans le cas du circuit LC, on a $\varphi = -\pi/2$. Lorsque $|\varphi| = \pi/2$, les deux grandeurs sont dites **en quadrature**.

Il y a une ambiguïté sur la définition du déphasage. En effet, on pourrait aussi bien écrire :

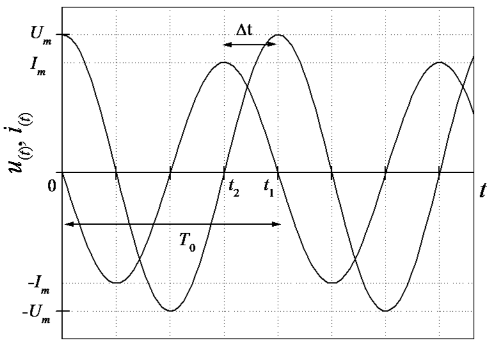
$$\begin{cases} u_{(t)} = U_m \cos \omega_0 t \\ i_{(t)} = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'il y a deux conventions de signe possibles. Les deux sont utilisées, et aucune n'est meilleure que l'autre. Cependant, une fois choisie une écriture, il faut s'y tenir. Dans cette seconde écriture, le déphasage serait $\varphi = \pi/2$.

2.2 Retard et avance.

Considérons une période quelconque, c'est-à-dire un intervalle de temps compris entre une date t_0 prise au hasard, et la date $t_0 + T_0$. Sur cette période, identifions les maxima les plus proches de $u_{(t)}$ et $i_{(t)}$; soit t_1 l'instant correspondant à ce maximum de la tension, et t_2 l'instant correspondant à ce maximum de l'intensité. (On pourrait raisonner aussi avec les minima).

On constate que sur une période, le courant parvient à son maximum avant la tension, soit $t_1 < t_2$. On dit que **le courant est en avance sur la tension**, ou réciproquement que **la tension est en retard sur le courant**. Comme on l'a vu, le déphasage est $-\pi/2$; le courant est donc en avance de phase de $\pi/2$, ou encore en quadrature avance, sur la tension. Réciproquement, la tension est en quadrature retard sur la tension.



L'avance et le retard de phase correspondent à une avance ou un retard temporels. Raisonnons sur la première période $[0; T_0]$. Le maximum atteint par la tension correspond à :

$$u_{(t_1)} = U_m \Rightarrow \cos \omega_0 t_1 = \cos \frac{2\pi t_1}{T_0} = 1 \Rightarrow \omega_0 t_1 = 0 \text{ ou } 2\pi$$

$$\Rightarrow t_1 = 0 \text{ ou } \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0 \tag{20}$$

De même, le courant atteint son maximum lorsque :

$$i_{(t_2)} = I_m \Rightarrow \cos\left(\omega_0 t_2 + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \omega_0 t_2 = 1 \Rightarrow \omega_0 t_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{3\pi}{2\omega_0} = \frac{3T_0}{4} \tag{21}$$

Les deux maxima de $u_{(t)}$ et $i_{(t)}$ les plus proches sont observés aux dates $3T_0/4$ pour l'intensité et T_0 pour la tension. On a donc un décalage temporel de $T_0/4$ entre les deux signaux. Le courant est en **avance temporelle** de $t_1 - t_2 = T_0/4$; réciproquement, la tension est en retard temporel de $T_0/4$. Entre deux grandeurs vibrant en quadrature, il existe un décalage temporel d'un quart de période.

On peut tirer de cet exemple une formule très générale. Soit $|\Delta t| = |t_1 - t_2|$ le décalage temporel entre les deux grandeurs. On a dans notre exemple :

$$\frac{|\Delta t|}{T_0} = \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2 \times 2\pi} = \frac{|\varphi|}{2\pi} \tag{22}$$

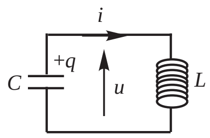
Ceci se retrouve facilement à l'aide d'une règle de trois, en remarquant qu'à un déphasage de 2π correspond un décalage temporel de T_0. On retiendra donc la formule très générale liant le décalage temporel au déphasage :

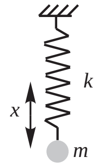
$$\boxed{\frac{|\Delta t|}{T_0} = \frac{|\varphi|}{2\pi}} \tag{23}$$

Le signe devant être déduit de l'étude des fonctions représentatives des deux grandeurs, une étude graphique étant souvent la plus simple.

3 Analogies électromécaniques.

Elles seront vues en détail à l'occasion du cours sur les oscillateurs mécaniques : masse accrochée à un ressort sans frottement, pendule pesant sans frottement, etc. On donne ici l'analogie avec une masse m qui oscille au bout d'un ressort de constante de raideur k.





$\dfrac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 q = 0$	équation différentielle	$\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$
charge q, tension u	variable de l'oscillateur	allongement x
$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$	pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Plus finement, peut-on trouver l'équivalent mécanique de la capacité C du condensateur et de l'inductance L de la bobine ? Pour cela, récrivons l'équation différentielle telle qu'elle est fournie par la loi des mailles d'une part, et par le principe fondamental de la dynamique d'autre part.

$\dfrac{q}{C} + L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$	équation différentielle	$m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kx = 0$
charge q	variable de l'oscillateur	allongement x
intensité $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$	variation temporelle de la variable	vitesse $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$
$\dfrac{1}{C}$	paramètre d'élasticité (raideur)	k
L	paramètre d'inertie	m
$\dfrac{Li^2}{2}$	énergie cinétique	$\dfrac{mv^2}{2}$
$\dfrac{q^2}{2C}$	énergie potentielle	$\dfrac{kx^2}{2}$